

# Systemidentifikation und Bauwerksüberwachung mit piezokeramischen Aktuatoren

Von der Fakultät

Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig  
zur Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

von

**Konrad Schuster**

aus Mülheim an der Ruhr

Eingereicht am	20. Dezember 2009
Mündliche Prüfung am	09. Juli 2010
Berichter	Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler Prof. Dr.-Ing. Peter Horst
Prüfer	Prof. Dr.-Ing. Sabine Langer

Braunschweig 2010

ISBN 978-3-926031-10-5

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler  
©Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 2010

## **Kurzfassung**

In dieser Arbeit wird ein Monitoringkonzept für die automatisierte Überwachung von Stahltragwerken entwickelt. Das Konzept bewertet die Schwingungseigenschaften harmonisch angeregter Strukturen mit den Methoden der Systemidentifikation.

Die Messtechnik wird in Form von piezokeramischen Aktuatoren direkt in das Tragwerk integriert. Die piezokeramischen Aktuatoren ermöglichen sowohl die dynamische Anregung des Systems als auch die Messung der Systemantwort. Für die Berechnung piezoelektrischer Systeme wird die Finite-Elemente-Methode verwendet. Das entwickelte finite Makroelement verringert den numerischen Aufwand, indem die elektro-mechanischen Gleichungen auf Elementebene analytisch gelöst werden.

Im Rahmen der Systemidentifikation erfolgt die Anpassung eines mathematischen Modells des Tragwerks mit Hilfe der indirekten parametrischen Identifikation an die experimentell ermittelten dynamischen Größen. Das identifizierte Modell dient als Referenzlösung für die Zustandsanalyse.

Für die Identifikation lokaler Zustandsänderungen werden zwei Indikatoren vorgestellt, welche die Lokalisierung und Quantifizierung einer Zustandsänderung ermöglichen. Hierfür wird die indirekte parametrische Identifikation mit einem Testverfahren gekoppelt. Die Validierung des Konzeptes erfolgt numerisch sowie experimentell an einem geschädigten Stahlblech.

## **Abstract**

The present work deals with a structural health monitoring concept for steel structures. The concept evaluates the vibration characteristics of harmonically excited structures with the methods of system identification.

The measurement instrumentation is integrated into the structure. By means of piezoceramic actuators it is possible to excite the system as well as to measure the system response. For the computation of piezoelectric systems the Finite-Element-Method is applied. A finite macro-element is developed to increase the numerical efficiency by incorporating the analytical solution of the electro-mechanical equations.

A model updating algorithm is applied to adapt a mathematical model of the structure to the experimental data. The identified model serves as reference solution for further investigations.

For the localization and quantification of a local damage two indicators are presented, based on the model updating algorithm in combination with a test procedure. The validation of the concept is realized numerically and experimentally on a damaged steel plate.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit . . . . .	3
1.2 Stand der Forschung . . . . .	4
<b>2. Grundlagen der Dynamik und Signalverarbeitung</b>	<b>9</b>
2.1 Bewegungsgleichung . . . . .	9
2.2 Dämpfung . . . . .	10
2.3 Eigenwertaufgabe . . . . .	11
2.4 Lösung der Bewegungsgleichung . . . . .	12
2.5 Signalverarbeitung . . . . .	14
2.6 Anregung . . . . .	18
<b>3. Piezoelektrizität</b>	<b>21</b>
3.1 Historische Entwicklung . . . . .	21
3.2 Piezoelektrische Materialien . . . . .	22
3.3 Piezoelektrische Koeffizienten . . . . .	24
3.4 Dielektrische Hysterese . . . . .	29
3.5 Bauelemente . . . . .	30
<b>4. Diskretisierung der elektro-mechanischen Modellgleichungen</b>	<b>33</b>
4.1 Elektro-mechanische Modellgleichungen . . . . .	33
4.2 Finite-Elemente-Formulierung für piezoelektrisches Verhalten . . . . .	34
4.2.1 Scheibenelement . . . . .	35
4.2.2 Balkenelement . . . . .	40
4.2.3 Plattenelement . . . . .	46
4.3 Makro-Scheibenelement . . . . .	50
4.3.1 Lastspannungszustand . . . . .	51
4.3.2 Einheitsspannungszustand . . . . .	54
4.3.3 Elementsteifigkeitsmatrix aus elektro-mechanischer Kopplung	56
4.3.4 Netzverdichtung . . . . .	57
4.3.5 Verifikationsbeispiele . . . . .	58

<b>5. Systemidentifikation</b>	<b>63</b>
5.1 Parameterschätzverfahren . . . . .	63
5.1.1 Parametrisierung der Systemmatrizen . . . . .	64
5.1.2 Fehlerquadratmethode . . . . .	66
5.1.3 Maximum-Likelihood-Methode . . . . .	68
5.1.4 Bayes-Schätzung . . . . .	70
5.2 Residuen . . . . .	71
5.2.1 Korrektur der Übertragungsfunktion . . . . .	71
5.2.2 Korrektur modaler Größen . . . . .	74
5.3 Numerische Untersuchungen . . . . .	77
5.3.1 Spundwand . . . . .	77
5.3.2 Sensitivitätsuntersuchung am Kragarm . . . . .	81
5.4 Experimentelle Untersuchungen . . . . .	85
5.4.1 Frei hängendes Stahlblech . . . . .	85
5.4.2 Kragarm . . . . .	92
5.5 Zusammenfassende Bewertung . . . . .	93
<b>6. Bauwerksmonitoring und Zustandsanalyse</b>	<b>95</b>
6.1 Globaler Zustandsindikator . . . . .	96
6.2 Lokale Zustandsindikatoren . . . . .	97
6.3 Numerische Untersuchungen . . . . .	100
6.3.1 Zweifeldträger . . . . .	100
6.3.2 Rahmentragwerk . . . . .	104
6.4 Experimentelle Untersuchungen . . . . .	106
6.4.1 Identifikation einer Zusatzmasse . . . . .	106
6.4.2 Identifikation einer Kerbe . . . . .	109
<b>7. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>113</b>
<b>Literatur</b>	<b>115</b>

# Nomenklatur

Lateinische Indizes bzgl. der Koordinaten laufen von 1 bis 3. Nachfolgend nicht angegebene Formelzeichen werden beim erstmaligen Auftreten erläutert.

## Allgemeine Notation

$d$	:	Differential
$\partial$	:	partielle Ableitung
$(\dot{\phantom{x}})$	:	Zeitableitung
$\delta$	:	virtuelle Größe
$\Delta$	:	inkrementelle Größe
$(\phantom{x})^T$	:	Transponierte

## Lateinische Symbole

$\mathbf{B}$	:	Dämpfungsmatrix
$C_{ijkl}$	:	Steifigkeitstensor
$\tilde{D}_i$	:	Vektor der dielektrischen Verschiebung
$\mathbf{D}$	:	Sensitivitätsmatrix
$e_{ijk}$	:	piezoelektrischer Kopplungstensor
$E$	:	Elastizitätsmodul
$\tilde{E}_i$	:	Vektor der elektrischen Feldstärke
$f$	:	Frequenz
$\mathbf{f}$	:	Residuumsvektor
$G$	:	Schub-Modul
$\mathbf{G}(\Omega)$	:	Frequenzgangmatrix
$H$	:	freie Enthalpie
$\mathbf{I}$	:	Einheitsmatrix
$J(\tilde{r})$	:	Besselfunktion
$J(\alpha)$	:	Zielfunktional
$\mathbf{K}$	:	Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{M}$	:	Massenmatrix
$\mathbf{n}$	:	Normalenvektor
$N(\tilde{r})$	:	Neumannfunktion
$\mathbf{p}$	:	Lastvektor
$\tilde{q}$	:	elektrische Oberflächenladung
$\mathbf{q}_k$	:	generalisierte Koordinaten
$S_{ijkl}$	:	Nachgiebigkeitstensor
$\mathbf{S}(\Omega)$	:	dynamische Steifigkeitsmatrix

$t$	: Zeit
$\mathbf{T}$	: Transformationsmatrix
$\mathbf{u}$	: Verschiebungsvektor
$U$	: freie Energie
$\mathbf{W}$	: Wichtungsmatrix
$x$	: Beschreibungsvariable
$\hat{\mathbf{x}}$	: Eigenmode
$\hat{\mathbf{X}}$	: Modalmatrix

### Griechische Symbole

$\alpha$	: Korrekturparameter
$\beta$	: Lageindikator
$\gamma$	: globaler Zustandsindikator
$\delta$	: Abklingkoeffizient
$\tilde{\epsilon}_{ij}$	: Dielektrizitätstensor
$\epsilon_{ij}$	: Verzerrungstensor
$\kappa$	: Krümmung
$\lambda$	: Eigenwert
$\boldsymbol{\lambda}$	: Diagonalmatrix der Eigenwerte
$\nu$	: Querdehnzahl
$\rho$	: Dichte
$\sigma_{ij}$	: Spannungstensor
$\boldsymbol{\Sigma}_x$	: Kovarianzmatrix bzgl. $x$
$\tilde{\phi}$	: elektrisches Potential
$\omega$	: Eigenkreisfrequenz
$\Omega$	: Erregerfrequenz
$\mathbf{\Omega}$	: Matrix der Ansatzfunktionen



# 1. Einleitung

Dem Bau eines Tragwerks gehen die Modellbildung und die Systemanalyse voraus, um den Nachweis der Tragsicherheit und der Gebrauchstauglichkeit zu erbringen und das Tragwerk effizient auszulegen. Im Rahmen der Modellbildung erfolgt die Reduktion auf alle für das Tragverhalten wichtigen Komponenten und anschließend die Idealisierung von Geometrie, Randbedingungen und Materialeigenschaften. Die Formulierung der Grundgleichungen für Gleichgewicht, Kinematik und Material führt auf ein mathematisch mechanisches Modell, mit dem die Berechnung des Tragverhaltens möglich ist.

Dem Modell liegen zum Teil stark vereinfachende Annahmen zugrunde, weshalb es zu großen Abweichungen zwischen berechnetem und realem Tragverhalten kommen kann. Hohe Sicherheitsbeiwerte sorgen dafür, dass das Tragverhalten stets zur „sicheren Seite“ hin abgeschätzt wird. In ausgewählten Fällen ist jedoch die genaue Vorhersage und die zeitliche Entwicklung des Tragverhaltens von Interesse, beispielsweise bei der Umnutzung von Bauwerken oder im Rahmen der Bauwerksüberwachung. Dann ist es notwendig, das reale Tragverhalten „in situ“ zu ermitteln und das System zu identifizieren.

Die Systemidentifikation ist das Bindeglied zwischen der experimentellen und der theoretischen Systemanalyse, siehe Bild 1.1. Aufgabe der Systemidentifikation ist, ein Modell zu bestimmen, das den Zusammenhang zwischen den im Experiment ermittelten Ein- und Ausgangsgrößen adäquat beschreibt. Das zu Beginn der Überwachung identifizierte Modell dient als Referenz für weitere Untersuchungen.

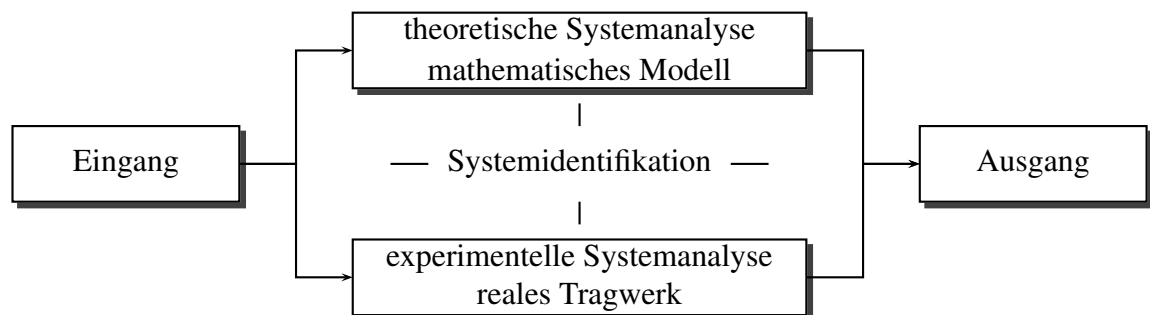


Bild 1.1: Ein-/Ausgangsbeziehung

Auf der Systemidentifikation bauen die Zustandsanalyse und die Bauwerksüberwachung auf, die im englischsprachigen Raum unter dem Begriff „Structural Health Monitoring“ zusammengefasst werden. Aufgabe ist es dabei, die Tragfähigkeit und die Funktionalität des Tragwerks über die gesamte Lebensdauer zu gewährleisten und mögliche Zustandsänderungen so früh wie möglich zu erkennen. Im Fall fortgeschrittener Schädigung oder nach Extremereignissen, wie z. B. Erdbeben, ist zudem die Resttragfähigkeit des Tragwerks von Interesse.

Im Gegensatz zur Systemidentifikation, die lediglich der Validierung des Berechnungsmodells dient, benötigt die Zustandsanalyse als Referenz den ungeschädigten bzw. den Ausgangszustand, um eine Zustandsänderung im Vergleich zur aktuellen Messung bestimmen zu können. Im Allgemeinen erfolgt die Zustandsanalyse in vier Stufen:

1. Nachweis einer Zustandsänderung
2. Lokalisierung
3. Quantifizierung
4. Zustandsentwicklung und Lebensdauerprognose.

Im Bauingenieurwesen regelt DIN 1076 [23] die Überwachung von „Ingenieurbauwerken im Zuge von Straßen und Wegen“. In den wesentlichen Punkten schreibt die Norm alle drei Jahre eine einfache visuelle Prüfung und alle sechs Jahre eine genauere Hauptprüfung vor. Für andere bauliche Anlagen existieren lediglich „Hinweise für die Überprüfung der Standsicherheit von baulichen Anlagen“ [22]. Die ordnungsgemäße Instandhaltung und Überwachung bestehender Bauwerke liegt stets im Verantwortungsbereich des Eigentümers.

Aufgrund der im Bauwesen üblichen hohen Sicherheitsbeiwerte und aufgrund der Kosten, die ein kontinuierliches Monitoring verursacht, ist der Aufwand einer automatisierten Überwachung nur in Ausnahmefällen zu rechtfertigen. Hierzu zählen z. B. hochbeanspruchte oder nicht frei zugängliche Bauteile, Tragwerke mit kurzer Lebensdauer und dementsprechend niedrigen Sicherheitsbeiwerten oder zentrale Bauwerke der Infrastruktur wie Brücken, Staudämme oder Kraftwerke.

In anderen Bereichen des Ingenieurwesens, wie der Luft- und Raumfahrttechnik oder dem Maschinenbau, ist die strukturelle Überwachung bereits weiter verbreitet. Zum einen werden die Tragreserven häufig weiter ausgenutzt und die Sicherheitsanforderungen sind höher. Zum anderen erleichtern Massenproduktion und genauere Herstellungsprozesse den zuverlässigen Einsatz integrierter Messtechnik.

## 1.1 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines Monitoringkonzeptes für die automatisierte Überwachung von Stahltragwerken auf Grundlage einer Schwingungsanalyse. Mit den Methoden der Systemidentifikation erfolgt die Anpassung des mathematischen Modells an die experimentell ermittelten dynamischen Größen. Grundlage des mathematischen Modells ist die Bewegungsgleichung, die die Kinetik eines Tragwerks beschreibt. In Kapitel 2 werden Lösungsmöglichkeiten für die Bewegungsgleichung sowie Aspekte der Signalverarbeitung diskutiert.

Die Messtechnik soll in Form von piezokeramischen Aktuatoren direkt in das Tragwerk integriert werden. Die piezokeramischen Aktuatoren ermöglichen sowohl die dynamische Anregung des Systems als auch die Messung der Systemantwort. Kapitel 3 gibt einen Überblick über den piezoelektrischen Effekt sowie über Eigenschaften und Anwendungen piezoelektrischer Materialien.

Für die Berechnung piezoelektrischer Systeme wird im Rahmen dieser Arbeit die Finite-Elemente-Methode verwendet. In Kapitel 4 erfolgt die Herleitung der schwachen Form der Bewegungsgleichung mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebung und die Diskretisierung der elektro-mechanischen Modellgleichungen. Darüber hinaus wird ein finites Makroelement hergeleitet, bei dem die elektro-mechanischen Gleichungen analytisch gelöst werden, womit eine Verringerung des numerischen Aufwandes möglich ist.

In dieser Arbeit erfolgt die Systemidentifikation mit der indirekten parametrischen Identifikation. Im Mittelpunkt steht die Fehlerquadratmethode. Je nach Vorwissen über das reale Tragverhalten und die statistische Verteilung der experimentellen Daten kommen alternative Parameterschätzverfahren, wie die Likelihood oder die Bayes Schätzung, für die Korrektur zum Einsatz. Das zu optimierende Zielfunktional kann im Zeitbereich oder im Frequenzbereich definiert werden. Die hier verwendeten Verfahren beschränken sich auf den Frequenzbereich, speziell auf die Korrektur modaler Größen sowie die Korrektur der Übertragungsfunktion. Kapitel 5 gibt einen Überblick über die vorgestellten Methoden. Die Verifikation erfolgt anhand verschiedener numerischer Beispiele sowie der experimentellen Untersuchung eines Stahlblechs.

Kapitel 6 stellt das entwickelte Monitoringkonzept vor. Ausgehend von der Referenzlösung, die mit den zuvor beschriebenen Methoden der Systemidentifikation bestimmt wird, erfolgt die Definition eines globalen Zustandsindikators für die Bewertung des globalen IST-Zustands. Für die Identifikation lokaler Zustandsänderungen werden zwei Indikatoren vorgestellt, welche die Lokalisierung und Quantifizierung lokaler Zustandsänderungen ermöglichen. Die Validierung des Konzeptes erfolgt numerisch sowie experimentell an einem geschädigten Stahlblech.

## 1.2 Stand der Forschung

### Piezelektrische Finite-Element-Modellierung

Die Pionierarbeiten im Bereich der Modellierung piezoelektrischer Materialien gehen in die 1950er Jahre auf *Mindlin* [73], *Tiersten und Mindlin* [90] und *Eer Nisse* [27, 28] zurück. *Allik und Hughes* [4] stellen bereits 1970 ein finites piezoelektrisches Tetraederelement vor. Es folgt eine Vielzahl weiterer Formulierungen piezoelektrischer ein-, zwei- und dreidimensionaler finiter Elemente, die hauptsächlich für die Auslegung von Ultraschallwandlern gedacht sind, siehe *Lerch* [59]. Mit der Weiterentwicklung piezoelektrischer Materialien und deren Einsatz als „smart materials“ ändern sich auch die Anforderungen an die Finite-Elemente-Modelle. *Benjeddou* [8] gibt einen umfassenden Überblick über die Entwicklungen bis zum Jahr 2000. Aktuelle Arbeiten beschäftigen sich mit nichtlinearen Materialeigenschaften, wie Hysterese-Effekten oder temperaturabhängigen Phänomenen, siehe *Simcovic* [84] und *Görnandt* [44], *Klinkel et al.* [53] [54], *Butz* [13] oder *Linnemann* [64]. Ein weiterer Schwerpunkt liegt in der Formulierung mehrschichtiger Platten- und Schalenelemente mit integrierten piezoelektrischen Schichten, siehe z. B. *Carrera und Boscolo* [15], *Mesecke-Rischmann* [71] und *Benjeddou und Trindade* [10].

Die meisten Elemente basieren auf einer Finite-Elemente-Formulierung mit den mechanischen Weggrößen und dem elektrischen Potential als unabhängigen Variablen. Es existieren aber auch gemischte und hybride Formulierungen, bei denen Kraftgrößen oder die dielektrische Verschiebung als zusätzliche Freiwerte verwendet werden, siehe *Lammering und Mesecke-Rischmann* [58].

Die FE-Modelle können in gekoppelte und nicht gekoppelte Modelle unterteilt werden, je nachdem, ob elektrische Freiheitsgrade explizit Berücksichtigung finden oder nicht. Anstelle der vollständigen elektro-mechanischen Kopplung gibt es verschiedene Ansätze, den piezoelektrischen Effekt zu berücksichtigen. Die statische Kondensation der elektrischen Freiwerte eignet sich zur Modellierung reiner Aktuator-elemente, *Chen et al.* [18]. Andere Verfahren nutzen die Analogie zwischen Thermoelastizität und piezoelektrischem Effekt, *Hwang et al.* [47]. Diese alternativen Verfahren dienen in erster Linie der Reduzierung des Speicherbedarfs und kommen aufgrund der gestiegenen Rechnerkapazitäten nur noch selten zum Einsatz.

Eine zuverlässige Modellierung piezoelektrischer Aktuator-Elemente ermöglicht den Entwurf optimierter Regelungssysteme in allen Bereichen des Ingenieurwesens. Anwendungsgebiete sind z. B. die aktive Schwingungsdämpfung, siehe u. a. *Döngi et al.* [25], *Dosch et al.* [26] oder die Modellierung von piezoelektrisch gesteuerten Einspritzventilen, *Mehlfeldt* [70].

## Systemidentifikation

Die Systemidentifikation ist seit den 1960er Jahren Gegenstand der Forschung. Der Fortschritt ist eng mit den Entwicklungen in Messtechnik, Signalverarbeitung und Numerik verknüpft. Zur Grundlagenliteratur gehören unter anderem die Bücher von *Natke* [76] und *Friswell und Mottershead* [34]. Eine Übersicht geben die Artikel von *Friswell und Mottershead* [35] [74] oder *Krätzig und Link* [62] [57].

*Natke* [76] unterteilt die Systemidentifikation in

- die nichtparametrische,
- die direkte parametrische und
- die indirekte parametrische Identifikation.

Die nichtparametrische Identifikation beschreibt den Zusammenhang zwischen den gemessenen Ein- und Ausgangsgrößen mit Hilfe einer Funktion, die von keinen konkreten physikalischen Parametern abhängt. Hierzu gehören z. B. die experimentelle Ermittlung von Frequenzspektren und Übertragungsfunktionen sowie die Spektral- und Korrelationsanalyse, siehe auch *Smith* [85].

Die parametrische Identifikation umfasst dagegen Modelle, deren Eigenschaften von konkreten physikalischen Parametern abhängen. Der Versuchsaufbau der direkten parametrischen Identifikation zielt unmittelbar auf die Ermittlung der gesuchten modalen Größen ab. Eigenfrequenzen und Eigenmoden sind z. B. mit dem Phasenresonanzverfahren und dem Phasentrennungsverfahren ermittelbar, *Milberg und Kirchnopf* [72]. Mit den modalen Größen ist es möglich, Aussagen über Massen- und Nachgiebigkeitsverteilung im Tragwerk zu treffen.

Bei der indirekten parametrischen Identifikation folgen die physikalischen Parameter aus der Anpassung eines analytischen Korrekturmodells an das Experiment. Ausgangspunkt ist die Definition eines geeigneten Zielfunktional, das mithilfe eines Parameterschätzverfahrens optimiert wird. Gängige Schätzverfahren sind die gewichtete Fehlerquadratmethode, das Maximum-Likelihood-Verfahren, die Bayes-Schätzung oder die Methode der Hilfsvariablen, siehe z. B. *Goodwin und Payne* [42], *Eykhoff* [29], *Fritzen* [37] oder *Feng* [33].

Für das zu minimierende Zielfunktional kommen verschiedene Formulierungen in Frage. Die Korrektur kann im Zeitbereich oder im Frequenzbereich erfolgen. Mit Zeitbereichsverfahren, wie z. B. den Kalman-Filtern [51], ist es möglich, die Entwicklung physikalischer Parameter in der Zeit zu verfolgen und ggf. auch nichtlineare Effekte zu berücksichtigen. Die Korrektur ist jedoch äußerst aufwändig, da die erforderliche Zeitschrittweite für die Berechnung in der Regel sehr klein ist. Die

Korrekturmodelle sind somit auf wenige Freiheitsgrade beschränkt, worunter die Genauigkeit in höheren Frequenzbereichen leidet.

Im Frequenzbereich erfolgt die Korrektur entweder über die Übertragungsfunktion oder über modale Größen, wie Eigenfrequenzen, Eigenmoden oder Antiresonanzen, siehe *Oeljeklaus* [77], *Link und Wailand* [63] oder *Jones und Turcotte* [50]. Bei der Transformation in den Frequenzraum wird die Datenmenge stark komprimiert. Die Korrektur ist nicht mehr für jeden Zeitschritt, sondern nur noch für wenige Frequenzen durchzuführen und die Korrekturmodelle können dementsprechend aufwändiger gestaltet werden. Informationen über den zeitlichen Verlauf gehen allerdings verloren, weshalb sich die Identifikation auf lineare und schwach gedämpfte Systeme beschränkt.

Bei der indirekten parametrischen Identifikation handelt es sich im Allgemeinen um ein inverses, schlecht gestelltes Problem, für das verschiedene Arten der Stabilisierung existieren. Regularisierungstechniken sind z. B. in *Ahmadian et al.* [1] oder *Friswell et al.* [36] zu finden.

## **Structural Health Monitoring**

Ziel des „Structural Health Monitorings“ ist die kontinuierliche Überwachung von Bauteilen oder Bauwerken mit Hilfe von zerstörungsfreien Prüfverfahren. Mögliche Schädigungen sollen möglichst frühzeitig erkannt und behoben werden. Es existieren einige gute Übersichtsartikel, die bei der Orientierung in dem breit gefächerten Bereich helfen. Hierzu gehören u.a. *Brownjohn* [12], *Doebling et al.* [24] oder *Farrar et al.* [31] [32].

Zerstörungsfreie Prüfverfahren sind in lokale und globale Methoden zu unterteilen. Zu den lokalen Methoden zählen die visuelle Inspektion, Röntgen- und Ultraschallverfahren, Magnetfeld-, Wirbelstrom- oder Temperaturfeldmessungen, *Fahr et al.* [30], *Medgenberg und Ummenhofer* [69]. Lokale Methoden können sehr hohe Auflösungen erzielen, mit denen auch feinste Risse erkennbar sind. Allerdings sind die Verfahren auf frei zugängliche Bereiche beschränkt und die Untersuchungstiefe ist begrenzt. Zudem sind die Verfahren sehr aufwändig, wenn der Ort der Zustandsänderung vorab nicht eingrenzbar ist. Von daher besteht das Interesse an der Entwicklung globaler Methoden, die Aussagen über das Gesamttragwerk zulassen.

Zu der Gruppe der globalen Methoden zählen schwingungsbasierte und wellenausbreitungsbasierte Verfahren. Schwingungsbasierte Verfahren nutzen den Zusammenhang zwischen den physikalischen und den modalen Größen. Änderungen in Masse, Dämpfung oder Steifigkeit, den Systemabmessungen und den Randbedingungen haben unmittelbar Einfluss auf die Eigenfrequenzen und die Eigenmoden.

In den 1970er Jahren konzentriert sich die Forschung auf direkte Verfahren für die Überwachung von Offshore-Anlagen, siehe *Loland und Dodds* [65]. Hierbei werden die Auswirkungen ausgewählter Schädigungsszenarien auf die modalen Größen mit Hilfe eines Modells berechnet und in einem Schadenskatalog zusammengefasst. Die Bestimmung einer Zustandsänderung beschränkt sich auf die im Katalog enthaltenen Szenarien, weshalb eine Anwendung bei beliebiger Schädigung begrenzt ist.

Eine Reihe von Verfahren verwenden gemessene Eigenmoden. Das Modal Assurance Criterion (MAC) ist ein Maß für die Korrelation zwischen gemessenen Eigenmoden  $\hat{\mathbf{x}}_m$  und Referenzmoden  $\hat{\mathbf{x}}_r$ . Es gilt

$$\text{MAC}_{ij} = \frac{|\hat{\mathbf{x}}_{mi}^T \hat{\mathbf{x}}_{rj}|^2}{(\hat{\mathbf{x}}_{mi}^T \hat{\mathbf{x}}_{mi}) (\hat{\mathbf{x}}_{rj}^T \hat{\mathbf{x}}_{rj})} . \quad (1.1)$$

Der MAC-Wert variiert zwischen 0 (keine Korrelation) und 1 (volle Korrelation). Als Referenzmoden kommen analytisch ermittelte Eigenmoden oder am ungeschädigten Modell gemessene Eigenmoden in Frage. Es existiert eine Reihe von Weiterentwicklungen wie z. B. das Coordinate Modal Assurance Criterion (COMAC), *Allemang* [3] gibt eine Übersicht.

Anhand gemessener Eigenmoden und Eigenfrequenzen ist es zudem möglich, Aussagen über die Massen- oder Nachgiebigkeitsverteilung im Tragwerk zu machen. Bei bekannter Massenverteilung, gemessener Modalmatrix  $\hat{\mathbf{X}}$  und den in der Diagonalmatrix  $\lambda$  zusammengefassten Eigenwerten ergibt sich die Nachgiebigkeitsmatrix näherungsweise zu

$$\mathbf{K}^{-1} \approx \hat{\mathbf{X}} \lambda^{-1} \hat{\mathbf{X}}^T . \quad (1.2)$$

In der Regel sind nur die zu den kleinsten Eigenfrequenzen gehörenden Eigenmoden messbar. Für eine näherungsweise Bestimmung der Nachgiebigkeitsmatrix sind diese jedoch ausreichend, da sie die Eigenschaften der Nachgiebigkeitsmatrix dominieren. Die Fehlermatrix

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_0 - \mathbf{I} \quad (1.3)$$

ermöglicht den Vergleich zwischen der ermittelten Nachgiebigkeitsmatrix und der Systemmatrix Matrix  $\mathbf{K}_0$  eines Referenzmodells, siehe *Penday und Biswas* [79], *Stewering* [86] oder *Gao et al.* [38]. Neben Veränderungen in den Eigenmoden werden häufig auch abgeleitete Größen wie Krümmungen, Verzerrungen oder die Verzerrungsenergie der Eigenmoden betrachtet, siehe *Pandey et al.* [80], *Cornwell et al.* [20], *Hsu* [46] oder *Li et al.* [60].

Parameterkorrekturverfahren zählen zu den inversen, modellbasierten Verfahren. Die Bestimmung der Schädigungsparameter erfolgt hier durch Anpassung des analytischen Modells an die gemessenen Systemgrößen, siehe u. a. *Pabst* [78], *Kiefer* [52]

oder *Teughels* [88]. Eine ausführliche Diskussion gängiger Parameterkorrekturverfahren erfolgt in Kapitel 5.

Die Lambwellen-Methode zählt zu den wellenausbreitungsbasierten Methoden. Sie dient der Risserkennung in 1D-Strukturen, wie Trägern oder Rohrleitungen, sowie in 2D-Strukturen, wie z. B. dünnen Stahlblechen, siehe *Cawley und Alleyne* [16], *Giurgiutiu und Zagrai* [39] oder *von Ende et al.* [93]. Grundidee ist die Anregung von Lambwellen, die von einem Punkt ausgehend durch das Tragwerk laufen. Treffen die Wellen auf einen Rand oder einen Riss werden sie von dort reflektiert. Mit Hilfe eines Sensorarrays und einer Laufzeitmessung ist es möglich, aus der Reflektion auf den Ort eines Risses zu schließen. Der Vergleich der aktuellen Messung mit einer Referenzmessung an der ungeschädigten Struktur ermöglicht die Unterscheidung zwischen Randreflektionen und Reflektionen infolge einer möglichen Zustandsänderung. Für die Anregung und Messung der Lambwellen eignen sich piezoelektrische oder elektromagnetische Aktuatoren.

Lambwellen weisen ein dispersives Verhalten auf. Die infolge eines Testsignals angeregten symmetrischen und antisymmetrischen Moden breiten sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit im Tragwerk aus, wodurch das Signal mit zunehmender Entfernung vom Erregerpunkt auseinanderläuft. Bei der Auswertung ist es erforderlich, diesen Effekt zu berücksichtigen und das Signal mit Hilfe spezieller Filter zu rekonstruieren, siehe *Loppe und Peil* [66].

Die Lambwellen-Methode ist sehr sensitiv gegenüber kleinen Zustandsänderungen und ermöglicht deren genaue Lokalisierung. Die Quantifizierung der Zustandsänderung ist jedoch aufgrund eines fehlenden physikalischen Modells nicht möglich.

Die in der Literatur als „Acoustic Emission“ bekannte Schallemissionsanalyse entspricht der Lambwellen-Methode ohne aktive Anregung. Mit Hilfe eines Sensorarrays wird in das Bauteil „hineingehorcht“. Dabei wird davon ausgegangen, dass Risse während ihrer Entstehung charakteristische Geräusche verursachen. Wenn es im Laufe des kontinuierlichen Monitorings gelingt, in mehreren Sensoren die charakteristischen Merkmale im Zeitsignal zu erkennen, ist es möglich, über eine Laufzeitmessung auf den Ort der Rissbildung zu schließen, siehe z. B. *Gorman* [43].

Bei der elektro-mechanischen Impedanz-Methode, die u. a. in *Ayres et al.* [5], *Giurgiutiu et al.* [40] [41] oder *Park et al.* [81] beschrieben ist, werden piezoelektrische Aktuatoren auf die zu überwachende Struktur geklebt und ladungsgesteuert angeregt. Gleichzeitig erfolgt die Messung des elektrischen Potentials. Aufgrund der elektro-mechanischen Kopplung wirken sich strukturelle Veränderungen auch auf die elektrische Impedanz aus. Die Anregung erfolgt im Ultraschallbereich, eine Risserkennung beschränkt sich ausschließlich auf das Nahfeld des Aktuators.



## 2. Grundlagen der Dynamik und Signalverarbeitung

Grundlage des mathematischen Modells, das im Rahmen der Systemidentifikation mit Hilfe experimenteller Größen korrigiert wird, ist die Bewegungsgleichung der Strukturmechanik. Sie fasst die Grundgleichungen für Gleichgewicht, Kinematik und Material zusammen und dient der Beschreibung der Kinetik eines Tragwerks. Die Bewegungsgleichung ist eine Differentialgleichung in Raum und Zeit und beschreibt daher ein Anfangs-Randwertproblem.

Für die Berechnung der Verformungszustände einer Struktur eignet sich die Finite-Elemente-Methode (FEM), wenn eine analytische Lösung der Bewegungsgleichung nicht möglich ist. Bei der FEM wird das Tragwerk gedanklich in viele kleine Elemente unterteilt. Die Diskretisierung der Arbeitsgleichungen erfolgt, indem in den einzelnen Elementen Näherungsansätze für die gesuchten Größen gewählt werden, siehe *Dinkler* [2].

Die Grundlagen der Baudynamik sind z.B. in *Natke* [75] oder *Petersen* [82] beschrieben. In diesem Kapitel werden Lösungsmöglichkeiten für die Bewegungsgleichung angegeben werden. Desweiteren werden Methoden der Signalverarbeitung diskutiert, welche die in einem gemessenen Signal enthaltenen Informationen für den Nutzer zugänglich machen.

### 2.1 Bewegungsgleichung

Unter Berücksichtigung einer viskosen Dämpfung gilt die semidiskrete Bewegungsgleichung in Matrizenschreibweise

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{p}(t) , \quad (2.1)$$

mit

$\mathbf{M}$ :	Massenmatrix,	$\mathbf{x}$ :	Beschreibungsvariable,
$\mathbf{B}$ :	Dämpfungsmatrix,	$\mathbf{p}(t)$ :	Belastung,
$\mathbf{K}$ :	Steifigkeitsmatrix.		

Bei Betrachtung eines  $N$ -Massen-Schwingers entspricht Gleichung (2.1) einem System von  $N$  gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Die Gesamtlösung setzt sich aus der homogenen Lösung  $\mathbf{x}_h$  und der Partikularlösung  $\mathbf{x}_p$  zusammen,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p. \quad (2.2)$$

Die Lösungsmethoden unterscheiden sich nach Art der Anregung und der Dämpfung.

## 2.2 Dämpfung

Natürliche Schwingungen sind grundsätzlich gedämpft, da die kinetische Energie eines Systems nach und nach in andere Energieformen, wie Wärme- oder Schallenergie umgewandelt wird. Für viele Aufgabenstellungen ist der Einfluss aus Dämpfung nicht vernachlässigbar, insbesondere im Resonanzbereich sowie bei hohen Frequenzen tritt eine hohe Energiedissipation auf. Je nach Dämpfungsart kommen unterschiedlich komplexe Modelle zum Einsatz.

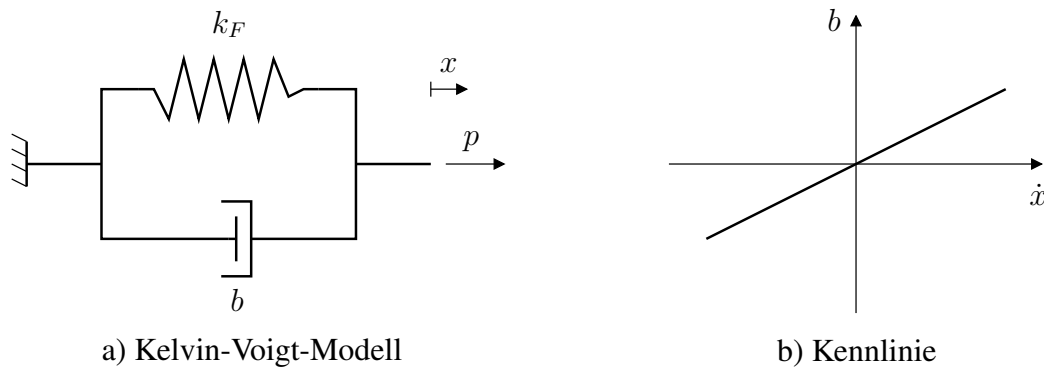


Bild 2.1: Viskoser Dämpfer

Bild 2.1 zeigt das Kelvin-Voigt-Modell zur Beschreibung visko-elastischen Materialverhaltens. Die Kennlinie des viskosen Dämpfers ist linear und stetig. Die viskose Dämpfung hat sich für die Berechnung schwach gedämpfter Systeme bewährt.

Die Bequemlichkeitshypothese unterscheidet zwischen innerer und äußerer Dämpfung. Die innere Dämpfung steht in Zusammenhang mit der Verzerrungsgeschwindigkeit im Kontinuum, der entsprechende Teil der Dämpfungsmatrix ist daher proportional zur Steifigkeitsmatrix. Die äußere Dämpfung ist abhängig von der Geschwindigkeit des einzelnen Masseteilchens und der entsprechende Anteil der Dämpfungsmatrix folglich proportional zur Massenmatrix,

$$\mathbf{B} = \gamma \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}. \quad (2.3)$$

Diese von Rayleigh getroffene Annahme führt auf eine symmetrische Dämpfungsmatrix mit den dimensionsbehafteten Beiwerten  $\gamma$  und  $\beta$ . Die Symmetrie erleichtert

die Lösung der Bewegungsgleichung und führt zu reellen Eigenmoden, die gut interpretierbar sind. Der Ansatz liefert für viele Aufgabenstellungen gute Ergebnisse. Die Dämpfung ist jedoch nicht proportional zu den Eigenfrequenzen  $\omega_{0i}$ , was im Gegensatz zu experimentellen Beobachtungen steht.

Der Ansatz einer Strukturdämpfung erfüllt die Forderung nach einer gleich starken Dämpfung aller Eigenfrequenzen, für die semidiskrete Bewegungsgleichung gilt in diesem Fall

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} (1 + i\beta) \mathbf{x} = \mathbf{p}(t) . \quad (2.4)$$

Die Dämpfungsmatrix entspricht dem Imaginärteil der komplexen Steifigkeitsmatrix und wird mit dem Faktor  $\beta$  skaliert. Unter Berücksichtigung einer Strukturdämpfung sind die Eigenmoden komplexwertig.

Die modale Dämpfung geht im Gegensatz zur viskosen Dämpfung oder der Strukturdämpfung von einer entkoppelten Bewegungsgleichung aus. Hier ist es möglich, jedem Eigenmode gezielt einen Dämpfungskoeffizienten zuzuordnen. Es gibt weitere Dämpfungsmodelle, die z.B. auch nichtlineare Effekte berücksichtigen, auf die an dieser Stelle jedoch nicht näher eingegangen wird.

## 2.3 Eigenwertaufgabe

Die homogene Lösung der Bewegungsgleichung beschreibt die freie Schwingung eines Systems. Der Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = a \hat{\mathbf{x}} e^{\lambda t} \quad (2.5)$$

separiert die Gesamtlösung in einen zeitlichen und einen räumlichen Anteil. Nach Elimination der Zeitvariablen folgt die quadratische Eigenwertaufgabe zu

$$[\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{B} + \mathbf{K}] \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} . \quad (2.6)$$

Als Lösung erhält man  $n = 1, \dots, N$  paarweise komplex konjugierte Eigenwerte

$$\lambda_n = -\delta_n \pm i\omega_n , \quad (2.7)$$

mit den Dämpfungskoeffizienten  $Re(\lambda_n) = -\delta_n$  und den Eigenkreisfrequenzen  $Im(\lambda_n) = \omega_n$ . Die Eigenvektoren  $\hat{\mathbf{x}}$  folgen nach Einsetzen der Eigenwerte in Gleichung (2.6). Eine Unbekannte des Eigenvektors kann beliebig gewählt werden, da das Gleichungssystem unterbestimmt ist. Die Modalmatrix  $\hat{\mathbf{X}} = [\hat{\mathbf{x}}_1, \dots, \hat{\mathbf{x}}_N]$  fasst alle Eigenvektoren zusammen, die Diagonalmatrix  $\lambda$  alle Eigenwerte  $\lambda_1 \dots \lambda_N$ . Es ist üblich, die Eigenvektoren zu normieren, um sie besser miteinander vergleichen zu können. Bei Normierung bezüglich der Massenmatrix gilt

$$\hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{I} . \quad (2.8)$$

Die Eigenvektoren entsprechen unter der Annahme proportionaler viskoser Dämpfung denen des ungedämpften Systems.

Für die Lösung der Eigenwertaufgabe kann es von Vorteil sein, das Gleichungssystem (2.1) mit  $N$  Differentialgleichungen 2. Ordnung auf ein System mit  $2N$  Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückzuführen. Mit der Transformation

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

folgt die Eigenwertaufgabe

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{K} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \right) \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0} . \quad (2.10)$$

Für die Lösung von Eigenwertaufgaben steht eine Reihe numerischer Verfahren zur Verfügung, wie die inverse Vektoriteration oder das Lanczos-Verfahren, *Bathe* [6].

Mit den modalen Größen ist die freie Schwingung vollständig beschreibbar, eine Partikularlösung existiert nicht,  $x_p = 0$ . Die Gesamtlösung entspricht der Summe aller Teilschwingungen

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^N a_n \hat{\mathbf{x}}_n e^{\lambda_n t} , \quad (2.11)$$

wobei die Faktoren  $a_n$  an die Anfangsbedingungen anzupassen sind. Der Ansatz (2.11) erfasst sowohl Impulsanregungen als auch Anfangsauslenkungen.

## 2.4 Lösung der Bewegungsgleichung

Die homogene Lösung der Bewegungsgleichung beschreibt die freie Schwingung infolge einer Anfangs-Randbedingung, während die Partikularlösung die Schwingung infolge einer zeitlich veränderlichen Belastung beschreibt. Für einige Anregungsarten existieren Lösungsansätze, die eine Integration in der Zeit vermeiden.

### Periodische Anregung

Die Fourier-Transformation ermöglicht die Zerlegung jedes periodischen Signals in eine Reihe harmonischer Funktionen. Die Partikularlösung der Bewegungsgleichung für eine Erregerfrequenz  $\Omega$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \hat{\mathbf{p}} e^{i\Omega t} \quad (2.12)$$

folgt mit dem Ansatz vom Typ der rechten Seite,  $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}} e^{i\Omega t}$ , zu

$$\hat{\mathbf{x}}(i\Omega) = (-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{B} + \mathbf{K})^{-1} \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{G}(i\Omega) \hat{\mathbf{p}} . \quad (2.13)$$

Im eingeschwungenen Zustand sind die Schwingungen infolge von Anfangsstörungen abgeklungen, sodass die komplexe Frequenzgangmatrix  $G(i\Omega)$  ausschließlich von der Erregerfrequenz  $\Omega$  abhängt. Für die Berechnung des Frequenzgangs ist das Gleichungssystem (2.13) für jede betrachtete Erregerfrequenz zu lösen. Eine numerisch weniger aufwendige Lösung bietet der Modalansatz.

## Modalansatz

Der Modalansatz beschreibt die Gesamtlösung als Summe aller Teilschwingungen,

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{X}} \mathbf{q}_k(t) . \quad (2.14)$$

Amplituden und Zeitverlauf sind in den generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}_k(t)$  zusammengefasst. Einsetzen in die Bewegungsgleichung (2.1) und anschließende Linksmultiplikation von  $\hat{\mathbf{X}}^T$  liefert

$$\hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{X}} \ddot{\mathbf{q}}_k + \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{B} \hat{\mathbf{X}} \dot{\mathbf{q}}_k + \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{X}} \mathbf{q}_k = \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{p}(t) . \quad (2.15)$$

Für das ungedämpfte System sowie bei Anwendung der Bequemlichkeitshypothese ist das Gleichungssystem unter Berücksichtigung der Normierung (2.8) vollständig entkoppelt. Für die Berechnung der  $N$  generalisierten Koordinaten stehen ebenso viele Gleichungen zur Verfügung. Jeder Eigenmode  $\hat{\mathbf{x}}$  ist als Ein-Masse-Schwinger interpretierbar, der mit der Last  $\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{p}(t)$  angeregt wird. Die Gesamtschwingung des Systems folgt aus der Überlagerung der Teilschwingungen mit dem Modalansatz (2.14).

Eine Reduzierung des Modalansatzes ist möglich, wenn nicht alle Teilschwingungen zur Beschreibung der Gesamtschwingung erforderlich sind. Ein System schwingt bevorzugt mit solchen Schwingungsformen, die in normiertem Zustand am wenigsten Energie beinhalten und zur Form der Belastung passen. Dies sind in der Regel die zu den niedrigen Eigenfrequenzen gehörenden Eigenmoden. Die Verwendung der reduzierten Modalmatrix  $\hat{\mathbf{X}}_r = [\hat{\mathbf{x}}_1, \dots, \hat{\mathbf{x}}_R]$  mit  $R < N$  verbessert die numerische Effizienz besonders bei der Berechnung von Modellen mit sehr vielen Freiheitsgraden, da nicht mehr alle Eigenmoden der Eigenwertaufgabe zu ermitteln sind.

Bei Vernachlässigung höherer Eigenmoden ist die Gesamtlösung zu korrigieren, wenn die ursprüngliche Belastung nicht vollständig mit der reduzierten Modalmatrix abgebildet werden kann. Die Restmode-Korrektur gleicht den Informationsverlust näherungsweise mit der Forderung nach statischem Gleichgewicht zu jedem Zeitpunkt  $t$  aus. Die statische Gesamtlösung abzüglich des Anteils der berücksichtigten Eigenmoden entspricht dem Anteil der vernachlässigten Eigenmoden,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \hat{\mathbf{X}}_r \mathbf{q}_r(t) + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p}(t) - \hat{\mathbf{X}}_r (\hat{\mathbf{X}}_r^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{X}}_r)^{-1} \hat{\mathbf{X}}_r^T \mathbf{p}(t) \\ &= \hat{\mathbf{X}}_r \mathbf{q}_r(t) + [\mathbf{K}^{-1} - \hat{\mathbf{X}}_r \boldsymbol{\lambda}_r^{-1} \hat{\mathbf{X}}_r^T] \mathbf{p}(t) . \end{aligned} \quad (2.16)$$

## Transiente Anregung

Bei beliebiger nichtperiodischer Anregung ist die Integration der Bewegungsgleichung in der Zeit unabdingbar. Das Duhamel-Integral

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) p(\tau) d\tau \quad (2.17)$$

entspricht der Lösung der Bewegungsgleichung, wenn die Systemantwort  $g(t)$  infolge eines Einheitsimpulses bekannt ist und die Erregerfunktion als eine endliche Reihe von Einheitsimpulsen angenähert wird. Für die direkte Lösung der Bewegungsgleichung im Zeitbereich existiert eine Reihe von Zeitintegrationsverfahren. Im Rahmen dieser Arbeit kommt das Newmark-Verfahren zum Einsatz, siehe *Bathe* [6] oder *Zienkiewicz* [96].

## 2.5 Signalverarbeitung

Die Messung der Systemantwort infolge einer beliebigen Anregung ist ausschließlich im Zeitbereich möglich. Die gemessenen Signale sind zunächst analog, das heißt kontinuierlich und stufenlos, und sie enthalten immer Rauschanteile infolge zufälliger oder systematischer Störungen. Unter dem Begriff Signalverarbeitung werden Methoden zusammengefasst, welche die in einem Signal enthaltenen Informationen für den Nutzer zugänglich machen. Hierzu gehören die Digitalisierung des Signals, die Transformation zwischen Zeit- und Spektralbereich sowie die Filterung und Bewertung verrauschter Signale.

### Digitalisierung

Für die rechnergestützte Auswertung ist es erforderlich, analoge Signale zu digitalisieren, um sie speichern und numerisch bearbeiten zu können. Hierfür wird das Signal an diskreten Stützstellen in regelmäßigem Abstand  $h$  abgetastet. Das Shannonsche Abtasttheorem bildet eine untere Schranke für die Abtastrate

$$\frac{1}{h} > 2 f_{max} \quad (2.18)$$

in Abhängigkeit von der maximal aufzulösenden Frequenz  $f_{max}$ . Bei Unterschreitung dieser Grenze treten Überlagerungsfehler (Aliasing) auf. Dabei werden Frequenzen oberhalb der Nyquist-Frequenz  $f_{nyq} = 1/(2h)$  falsch gedeutet und dem unteren Frequenzspektrum zugeordnet. Um diesen Effekt zu vermeiden, sind die Frequenzen  $f > f_{nyq}$  mit einem Tiefpassfilter zu entfernen.

Eine obere Schranke für die Abtastrate  $1/h$  ist mit der begrenzten zeitlichen Auflösung des Signals und der Größe des vorhandenen Speicherplatzes gegeben. Mit

der Abtastung geht immer auch eine Quantifizierung des Signals einher. Das digitale Signal erfährt eine Abstufung, wenn die Auflösung der Signalordinate begrenzt ist.

### Transformation zwischen Zeit- und Frequenzbereich

Viele in einem Signal enthaltenen Informationen sind für den Nutzer erst nach Transformation des Signals in den Spektralbereich zugänglich. Die Laplace-Transformation

$$\hat{x}(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} x(t) e^{-(\alpha + i\Omega)t} dt \quad (2.19)$$

überführt die Funktion  $x(t)$  aus dem reellen Zeitbereich in den komplexen Spektralbereich (s-Bereich). Der Faktor  $\alpha$  entspricht einer numerischen Dämpfung, welche die Transformation stabilisiert und somit auch die Berechnung physikalisch instabiler Zustände ermöglicht. Die Fourier-Transformation stellt einen Sonderfall der Laplace-Transformation mit  $\alpha \rightarrow 0$  dar. Interessanter für die praktische Berechnung von Frequenzspektren aus zeitlich beschränkten, diskreten Daten ist die diskrete Fourier-Transformation (DFT) sowie deren optimierte Variante, die Fast-Fourier-Transformation (FFT). In Bild 2.2 sind die Transformationen zwischen Zeit- und Frequenzbereich angegeben, siehe z. B. *Cooley und Tukey* [19] oder *Smith* [85].

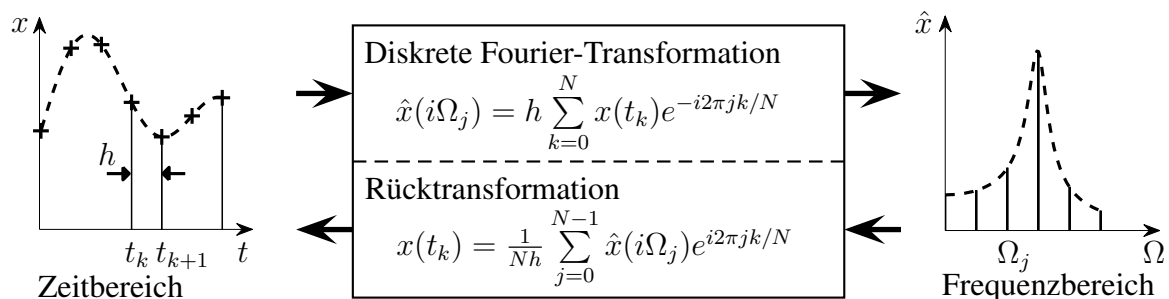


Bild 2.2: Diskretes Signal in Zeit- und Frequenzbereich

Aus dem Gesamtsignal steht immer nur ein endlicher Ausschnitt für die digitale Auswertung zur Verfügung. Mathematisch entsteht dieser Ausschnitt nach Multiplikation des Signals mit einer Rechteckfunktion. Stimmt die Fensterlänge nicht exakt mit einem Vielfachen der Periodendauer des untersuchten Signals überein, kommt es aufgrund von Unstetigkeiten an den Fensterrändern zu Abschneidefehlern (Leakage), die zu einem Verschmieren des Frequenzspektrums führen. Die Wichtung mit speziellen Fensterfunktionen kann die Aufweitung des Frequenzspektrums verringern. Geeignete Funktionen periodisieren das Signal künstlich, indem sie im Bereich der Fensterränder gegen null konvergieren und die Übergangsbereiche glätten. Bild 2.3

stellt die Auswirkungen der Wichtung mit Blackman-Funktion und Rechteckfunktion (nicht gewichtete Transformation) gegenüber.

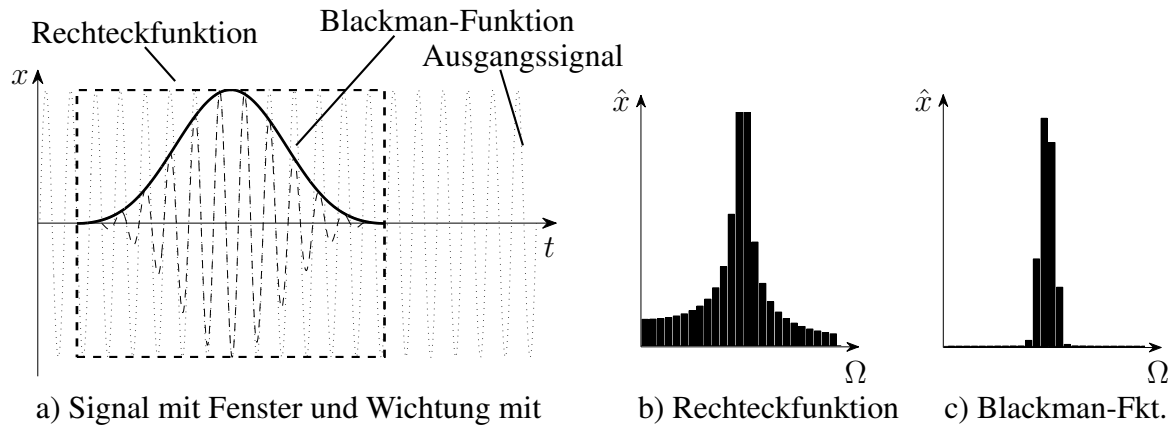


Bild 2.3: Signal in Zeit- und Frequenzbereich

## Filterung

Digitale Filter ermöglichen es, einzelne Frequenzen oder Frequenzbereiche gezielt zu regulieren und den Einfluss von Störfrequenzen zu begrenzen. Während analoge Filter aus elektronischen Schaltungen bestehen, handelt es sich bei digitalen Filtern um mathematische Werkzeuge, welche die im digitalen Signal enthaltenen Informationen unterschiedlich wichten. Eine Filterung ist sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich möglich. Digitale Filter lassen sich in rekursive Filter und nicht-rekursive Filter unterscheiden. Im Folgenden soll nur auf die nicht-rekursiven FIR-Filter (Finite-Impuls-Response) eingegangen werden, die mit einer endlich langen Impulsantwort arbeiten und unbedingt stabil sind. Für eine ausführliche Beschreibung sei auf *Smith* [85] verwiesen.

Der Mittelwertfilter stellt die einfachste Möglichkeit dar, ein Signal im Zeitbereich zu filtern. Ausreißer in den Messwerten werden durch Mittelwertbildung benachbarter Ordinaten gedämpft. Selektive Filter heben dagegen einzelne Frequenzen oder Frequenzbereiche gezielt hervor. Der Tiefpassfilter lässt beispielsweise nur Frequenzen unterhalb der Grenzfrequenz  $\Omega_c$  passieren. Bild 2.4a zeigt das Zielfrequenzspektrum eines idealen Tiefpassfilters. Die windowed-sinc-Filterfunktion in Bild 2.4b entspricht der inversen Fourier-Transformierten des Zielfrequenzspektrums, angepasst an die Anzahl der berücksichtigten Messwerte  $M$  und gewichtet mit einer Fensterfunktion (Hamming, Blackman, ...). Grenzfrequenz  $\Omega_c$  und Filterlänge  $M$  steuern die Eigenschaften des Filters. Die Multiplikation eines beliebigen Frequenzspektrums mit dem Zielfrequenzspektrum entspricht näherungsweise der Faltung des entspre-



chenden Zeitsignals mit der Filterfunktion. Für die Filterfunktion stehen unterschiedliche Ansätze zur Verfügung. Das Vorgehen lässt sich analog auf Hochpass-Filter, Breitband-Filter usw. übertragen.

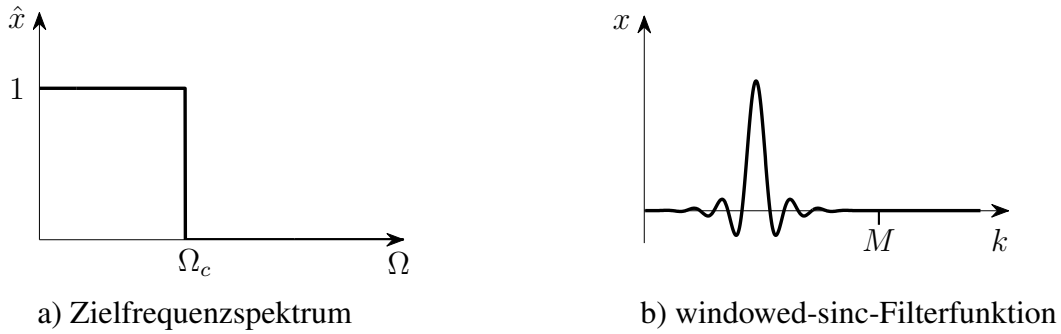


Bild 2.4: Idealer Tiefpassfilter

## Spektralanalyse

Bei der schwingungsbasierten Untersuchung eines Systems ist es sinnvoll, sowohl das Erregersignal (Eingangssignal), als auch das Antwortsignal (Ausgangssignal) zu messen. Die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich ist als Quotient aus der Fourier-Transformierten des Ausgangssignals  $Y(i\Omega)$  zu der des Eingangssignals  $X(i\Omega)$  definiert,

$$H(i\Omega) = \frac{Y(i\Omega)}{X(i\Omega)} . \quad (2.20)$$

Die Spektralanalyse bietet Möglichkeiten, die Qualität der ermittelten Übertragungsfunktion zu beurteilen und Angaben über das Signal-Rausch-Verhältnis zu machen. Während die Autoleistungsdichtespektren  $S_{xx}$  und  $S_{yy}$  die Energieverteilung eines Signals im Frequenzbereich beschreiben, enthalten die Kreuzleistungsdichtespektren  $S_{xy}$  und  $S_{yx}$  Informationen über den Phasenunterschied zwischen zwei Signalen:

$$\begin{aligned} S_{xx}(\Omega) &= X^*(i\Omega) X(i\Omega) , & S_{xy}(i\Omega) &= X^*(i\Omega) Y(i\Omega) , \\ S_{yx}(i\Omega) &= Y^*(i\Omega) X(i\Omega) , & S_{yy}(\Omega) &= Y^*(i\Omega) Y(i\Omega) . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Die komplexen Konjugierten der Spektren sind mit \* gekennzeichnet. Für die Ermittlung der Rauschanteile ist es erforderlich, die Leistungsdichtespektren mehrerer Messreihen zu mitteln. Es folgt die Definition der Schätzer

$$H_1(i\Omega) = \frac{S_{xy}(i\Omega)}{S_{xx}(\Omega)} , \quad H_2(i\Omega) = \frac{S_{yy}(\Omega)}{S_{yx}(i\Omega)} \quad \text{und} \quad H_3(i\Omega) = \sqrt{H_1 H_2} . \quad (2.22)$$

Für verrauschte Signale minimiert der  $H_1$ -Schätzer den Fehler in der Übertragungsfunktion bezüglich des Rauschens im Eingangssignal, der  $H_2$ -Schätzer bezüglich des

Rauschens im Eingangssignal. Für rauschfreie Signale entsprechen die Schätzer der Übertragungsfunktion. Die Kohärenzfunktion

$$\gamma^2(\Omega) = \frac{|S_{xy}(i\Omega)|^2}{S_{xx}(\Omega) S_{yy}(\Omega)} \quad (2.23)$$

ist ein Maß für das Signal-Rausch-Verhältnis und nimmt Werte zwischen 0 für restlos verrauschte Signale und 1 für rauschfreie Signale an. Bild 2.5 zeigt die Verläufe des  $H_3$ -Schätzers und der Kohärenzfunktion für einen Zwei-Massen-Schwinger. Während im Bereich der Resonanzen das wirkliche Signal dominiert,  $\gamma^2 \rightarrow 1$ , überwiegen in den Antiresonanz-Bereichen die Rauschanteile,  $\gamma^2 \rightarrow 0$ .

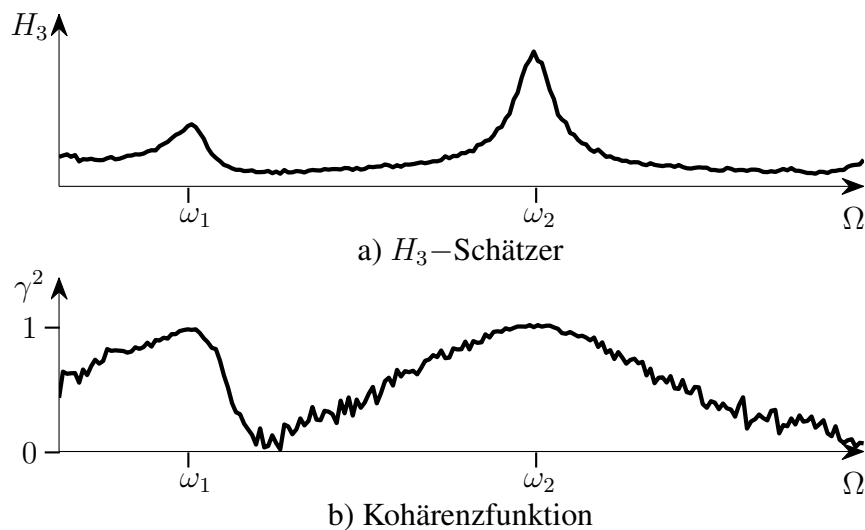


Bild 2.5: Spektralanalyse für einen Zwei-Massen-Schwinger

## 2.6 Anregung

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, ein Tragwerk in Schwingung zu versetzen. Die Qualität der gemessenen Systemantwort hängt dabei wesentlich von der Art der Anregung ab. Im passiven Versuch wird die natürliche Erregung eines Tragwerks infolge von Wind, Verkehr oder akustischen Signalen genutzt. In diesem Fall ist keine Aktuatorik erforderlich, die Erregung ist allerdings nicht steuerbar und das resultierende Spektrum häufig in der Bandbreite begrenzt. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt daher die Anregung der Struktur im aktiven Versuch mit Hilfe künstlicher Erregersignale.

Der Impulshammer stellt die einfachste Möglichkeit dar, ein Tragwerk künstlich anzuregen. Die Versuchsdauer ist sehr kurz, der Versuchsaufbau einfach. Die Energie des Impulses verteilt sich auf alle die Eigenfrequenzen, deren Eigenmoden im Bereich der Anregung keinen Nulldurchgang haben. Dieser Effekt erleichtert die Unterscheidung der Eigenfrequenzen (z.B. Biegung/Torsion), da es möglich ist, einzelne Frequenzen gezielt hervorzuheben oder auszublenden, indem der Ort der Anregung variiert wird. Wie in Bild 2.6a zu erkennen, werden die hochfrequenten Anteile

schnell weggedämpft, weshalb die Auflösung des Frequenzspektrums begrenzt ist. Ein weiterer Nachteil ist, dass die Größe des Impulses nur näherungsweise bestimmbar ist.

Ein Tragwerk schwingt ausschließlich mit einer Eigenfrequenz, wenn der zugehörige Eigenmode als Anfangsauslenkung in das Tragwerk eingeprägt wird, siehe Bild 2.6b. In der Praxis ist die näherungsweise Einprägung des ersten Eigenmodes die einzige realistische Anfangsbedingung. Bei einer aus Einfeldträgern bestehenden Brücke geschieht dies beispielsweise durch Anhängen und späteres Abtrennen eines Gewichtes in Trägermitte. Die Biegelinie entspricht zwar nicht exakt dem ersten Eigenmode, die Abweichung sind jedoch in der Regel vernachlässigbar. Der Versuch ist auf die Messung der ersten Eigenfrequenz beschränkt, die jedoch aufgrund der langen Messzeit sehr genau bestimmbar ist.

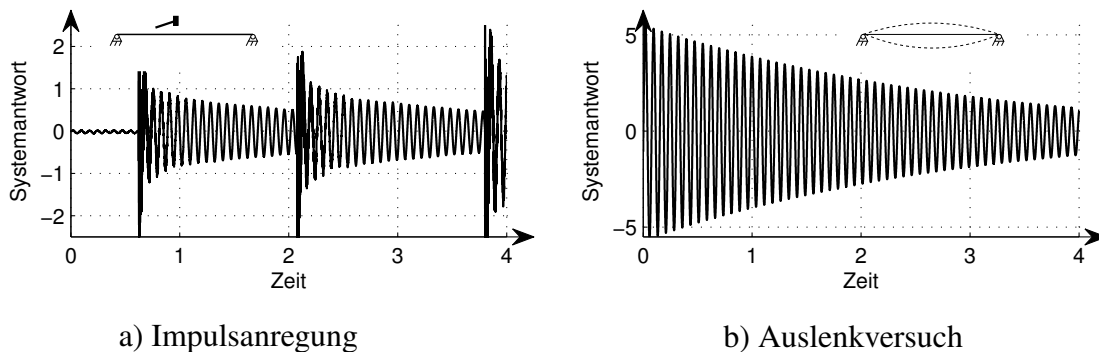


Bild 2.6: Systemantwort infolge unterschiedlicher Anregung

Alternativ kann die Anregung mit Hilfe von Unwuchterregern oder eingebauten Aktuatoren erfolgen, für die es verschiedene Ansteuerungssignale gibt. Bei der harmonischen Anregung wird jede Frequenz des Spektrums einzeln angeregt, siehe Bild 2.7a. Nach einer gewissen Einschwingzeit erfolgt die Messung der Systemantwort. Dieses Verfahren ist sehr robust gegenüber fremden Störsignalen und liefert auch im Bereich von Antiresonanzen saubere Frequenzspektren. Deren Auflösung ist durch die Messdauer begrenzt. Obwohl es möglich ist, mehrere Frequenzen gleichzeitig zu messen, ist die Messung extrem zeitaufwendig. Daher eignet sich die Anregung mit einem weißen Rauschsignal oder einem Gleitsinus, wenn nicht die exakte Übertragungsfunktion, sondern lediglich die Eigenfrequenzen des System gesucht sind.

In Bild 2.7b ist ein weißes Rauschsignal zu sehen. Dieses zeichnet sich durch ein konstantes Leistungsdichtespektrum aus. Die Versuchsdauer ist sehr kurz, da alle Frequenzen gleichzeitig angeregt werden und nur eine Messung erforderlich ist. Die in das System eingebrachte Energie ist wesentlich geringer, als bei der harmonischen Anregung. Nach entsprechender Skalierung weisen die Spektren im Bereich der Resonanzen eine hohe Übereinstimmung auf. Das Frequenzspektrum enthält jedoch

keine Antiresonanzen, da in diesen Bereichen das Rauschsignal dominiert, siehe Bild 2.7d. Das ideale weiße Rauschen ist in der Praxis nicht realisierbar, da die Energiemenge im Signal begrenzt ist. Stattdessen finden breitbandige weiße Rauschsignale Verwendung, deren Leistungsdichtespektren nur in bestimmten Frequenzintervallen konstant sind.

Auch bei Anregung mit der Gleitsinusfunktion nach Bild 2.7c ist nur eine Messung erforderlich. Der Sinus durchläuft in der vorgegebenen Zeit alle Frequenzen von null bis zur festgelegten Grenzfrequenz. Allerdings kann es vorkommen, dass der eingeschwungene Zustand nicht für alle Frequenzen gleichermaßen erreicht wird. In diesem Falle werden einzelne Eigenfrequenzen des Spektrums unterschätzt.

Es ist sinnvoll, verschiedene Anregungsarten zu verwenden, um die Vorteile der jeweiligen Methoden zu nutzen und qualitativ hochwertige Frequenzspektren zu erhalten. Ein weißes Rauschsignal liefert in kürzester Zeit gute Ergebnisse. Die unteren Eigenfrequenzen können mittels Auslenkversuchen und Impulsanregungen genauer bestimmt werden. Die harmonische Anregung liefert die genauesten Spektren, ist jedoch aufgrund des hohen Zeitbedarfs nur in Ausnahmefällen durchführbar.

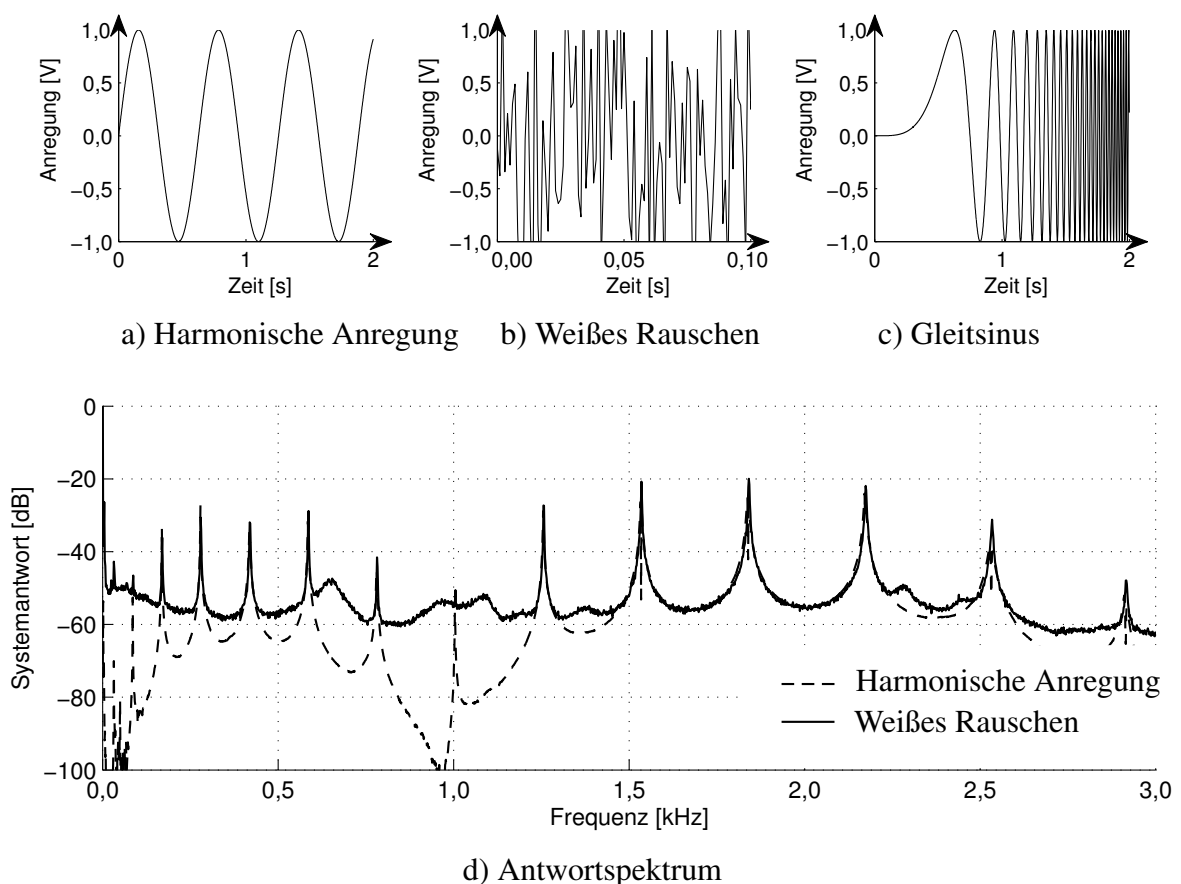


Bild 2.7: Systemantwort infolge unterschiedlicher Anregung

### 3. Piezoelektrizität

Für die Schwingungsanalyse von Tragwerken werden im Rahmen dieser Arbeit piezokeramische Aktuatoren verwendet. Dieses Kapitel soll einen kurzen Überblick über piezoelektrische Materialien, ihre Eigenschaften und Anwendungsfelder geben. Detailliertere Beschreibungen finden sich u. a. in *Ikeda* [48] oder *Cady* [14].

#### 3.1 Historische Entwicklung

Der piezoelektrische Effekt beschreibt die Fähigkeit mancher Kristalle, elektrische Energie und mechanische Energie ineinander umzuwandeln. *Jacques* und *Pierre Curie* dokumentieren diese Erscheinung erstmals 1880 an Turmalinkristallen. Die Transformation mechanischer in elektrische Energie wird als direkter piezoelektrischer Effekt bezeichnet und in der Sensorik genutzt, da die mechanische Verformung eines Sensors zu einem messbaren elektrischen Feld führt. Der inverse piezoelektrische Effekt beschreibt die Transformation elektrischer in mechanische Energie und kommt in der Aktuatorik zum Einsatz, da ein aufgebrachtes elektrisches Feld zu einer näherungsweise proportionalen mechanischen Verformung des Aktuators führt. *Gabriel Lippmann* begleitet die experimentellen Untersuchungen der Brüder Curie auf theoretischer Seite. Er sagt den inversen piezoelektrischen Effekt aufgrund thermodynamischer Betrachtungen voraus, noch bevor dieser 1881 von den Curies experimentell bestätigt wird. *Wilhelm Hankel* führt den Namen „Piezo“ ein, der von dem griechischen Wort für „drücken“ abgeleitet ist. Die erste Anwendung geht auf *Paul Langévin* während des ersten Weltkriegs zurück, der piezoelektrische Quarze für U-Boot-Sonare einsetzt.

In der darauffolgenden Zeit entstehen Anwendungen in vielen Bereichen der Schwingungstechnik. Allerdings sind die Möglichkeiten durch die Materialeigenschaften im Wesentlichen auf die Sensorik begrenzt. *Joseph Valasek* [91] beschreibt 1921 die Ferroelektrizität, wodurch der piezoelektrische Effekt auch makroskopisch nutzbar wird. Die Entwicklung synthetischer Piezokeramiken in den 1950er Jahren dehnt das Anwendungsspektrum auf weite Bereiche der Aktuatorik aus. Piezokeramiken kommen heute z. B. in der Ultraschalltechnik, der Präzisionspositionierung, der aktiven Schwingungsdämpfung und bei Hochdruckinjektoren von Dieselmotoren zum Einsatz.

### 3.2 Piezoelektrische Materialien

Piezoelektrizität tritt in nichtleitenden Kristallen auf, die kein Symmetriezentrum besitzen und mindestens entlang einer Achse polarisierbar sind. Die mechanische Deformation eines solchen kristallinen Körpers führt zu einer Verschiebung der positiven und negativen Ladungsschwerpunkte. An dem nach außen elektrisch neutralen Körper entsteht eine scheinbare Oberflächenladung. Kristalle mit nur einer polaren Achse heißen Pyroelektrika. Sie weisen eine spontane Polarisation auf, bilden also bereits im unbelasteten Zustand Dipole aus. Die Bezeichnung Pyroelektrizität folgt aus der Tatsache, dass die Größe der spontanen Polarisation temperaturabhängig ist. Materialien, deren spontane Polarisation durch ein äußeres elektrisches Feld beeinflusst werden kann, heißen Ferroelektrika. Das mechanische Äquivalent zur Ferroelektrizität ist die Ferroelastizität, die den Zusammenhang zwischen der Polarisation und der mechanische Deformation beschreibt.

Bild 3.1 gibt einen Überblick über die vorgestellten Kristallklassen, siehe *Voigt [92]*. Von den 32 Kristallklassen weisen 11 ein Symmetriezentrum auf. Von den verbleibenden 21 Kristallklassen besitzen 20 piezoelektrische Eigenschaften, die Ausnahme bildet die Kristallklasse 432, die aufgrund ihrer hohen Symmetrie keine wirksame Piezoelektrizität zeigt. Ferroelektrika bilden eine Untergruppe der 10 Kristallklassen mit pyroelektrischen Eigenschaften, siehe *Haertling [45]*.

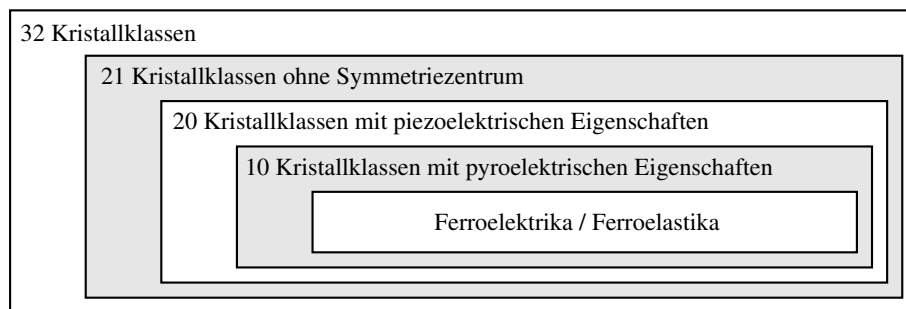


Bild 3.1: Kristallklassen und Einordnung von Ferroelektrika

Neben den natürlich vorkommenden piezoelektrischen Materialien, wie Quarz und Turmalin, gibt es synthetisch hergestellte Materialien, die je nach Anwendung speziell angefertigt werden. Mit piezoelektrischen Kunststoffen, wie PVDF (Polyvinylidenfluorid) können sehr dünne und dehnbare piezoelektrische Folien hergestellt werden. In der Aktuatorik kommen hauptsächlich Piezokeramiken zur Anwendung, die eine sehr viel ausgeprägtere elektro-mechanische Kopplung aufweisen. Die am häufigsten eingesetzte Piezokeramik ist Blei-Zirkonat-Titanat (PZT). PZT weist eine Perowskit-Struktur auf. Die Elementarzelle besteht aus Bleiionen in den Ecken-

ten, Sauerstoffionen in den Mittelpunkten der Seitenflächen und einem raumzentrierten Titanation oder Zirkonation. Das Verhältnis von Titanationen zu Zirkonationen ist wesentlich für das Materialverhalten verantwortlich. Oberhalb der Curie-Temperatur  $T_C$  ist die Gitterstruktur kubisch raumzentriert, siehe Bild 3.2a. In diesem Zustand fallen die Ladungsschwerpunkte zusammen und das Material weist keine piezoelektrischen Merkmale auf. Unterhalb der Curie-Temperatur liegt ein tetragonales oder rhomboedrisches Gitter vor, siehe Bild 3.2b. In diesem Fall verschiebt sich das zentrale Titanat- bzw. Zirkonation von seiner raumzentrierten Position weg, die Elementarzelle wird verzerrt und die Ladungsschwerpunkte fallen nicht mehr zusammen. Die Zelle besitzt jetzt einen Dipol und damit auch piezoelektrische Eigenschaften. Die Curie-Temperatur gängiger Piezokeramiken liegt im Bereich  $150^\circ\text{C} < T_C < 350^\circ\text{C}$ .

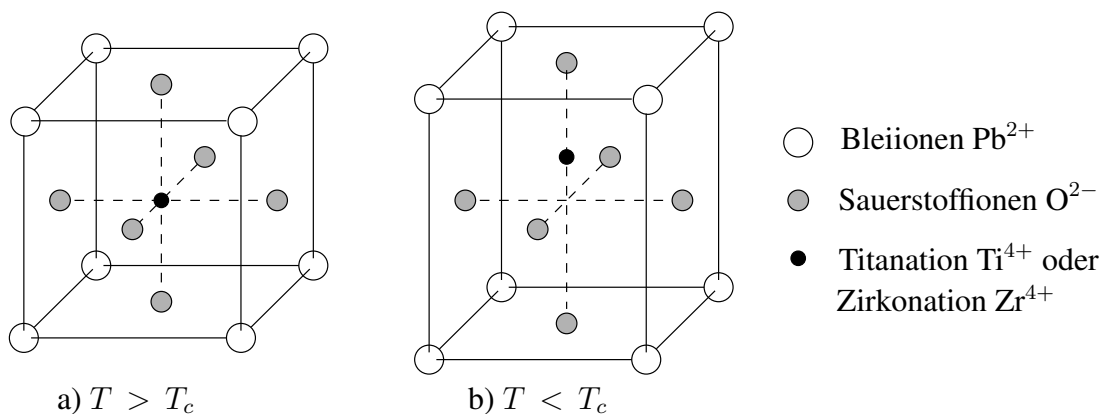


Bild 3.2: Perowskit-Struktur von PZT

Im depolarisierten Zustand ist die Richtung der spontanen Polarisierung einer Elementarzelle zunächst willkürlich, innerhalb eines Kornes bilden sich aber sogenannte Domänen aus, in denen alle Elementarzellen gleich ausgerichtet sind. Auf makroskopischer Ebene hebt sich, wie in Bild 3.3a dargestellt, die Polarisierung dennoch auf. Die Polarisierung auf makroskopischer Ebene erfolgt nach Anlegen eines starken elektrischen Feldes, siehe Bild 3.3b; die Dipole wollen sich parallel zum äußeren elektrischen Feld ausrichten und es kommt zu Umklappprozessen innerhalb der Domänen. Auch nachdem das elektrische Feld abgeschaltet ist, verbleibt eine remanente Polarisierung und das Material besitzt jetzt piezoelektrische Eigenschaften. Wird die Piezokeramik hohen elektrischen oder mechanischen Beanspruchungen ausgesetzt oder wird die Curie-Temperatur überschritten, so geht die Polarisierung des Materials verloren und der Polarisierungsvorgang muss wiederholt werden.

Für die klassische Herstellung von PZT werden die Grundelemente Bleioxid, Zirkoniumdioxid und Titandioxid wiederholt vermischt und gemahlen. Die Zugabe von Dotierelementen wie Strontium oder Zink ist üblich. Anschließend erfolgt die Sinterung des Pulvers bei Temperaturen bis  $1500^{\circ}\text{C}$ . Bei der Polarisation des Materials werden elektrische Felder von einigen  $\text{kV/mm}$  angelegt. Es existiert eine Reihe spezieller Verfahren, die den Herstellungsprozess bezüglich Homogenität der Keramik, Sintertemperatur und Prozessdauer optimieren.

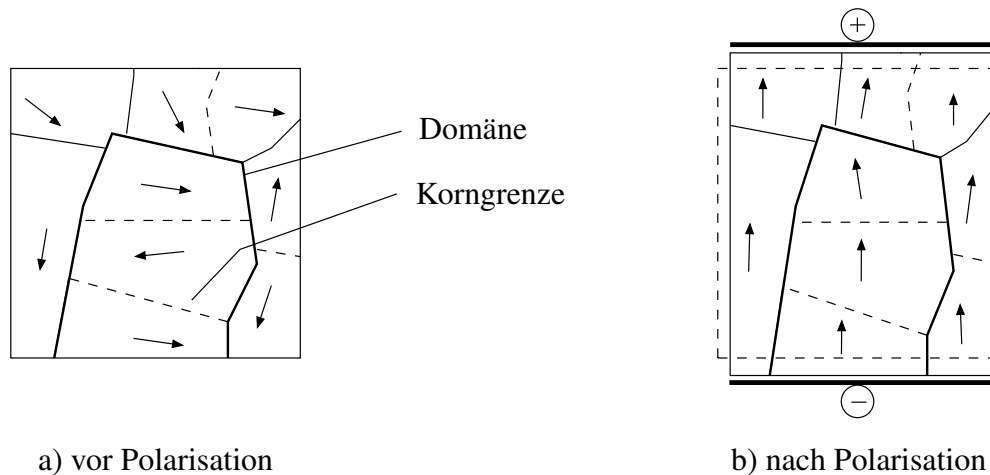


Bild 3.3: Domänenstruktur einer piezoelektrischen Keramik

### 3.3 Piezoelektrische Koeffizienten

Nachfolgend wird ein Modell für lineares, piezoelektrisches Materialverhalten beschrieben. Thermodynamisch konsistente Herleitungen piezoelektrischer Materialmodelle sind den Standardwerken, z.B. *Ikeda* [48], zu entnehmen. *Görndt* [44] gibt eine übersichtliche und vollständige Herleitung unter Einbeziehung der Temperatur an. *Maugin et al.* [68] beschäftigen sich mit der nichtlinearen elektro-mechanischen Kopplung.

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik sagt aus, dass Energie weder erzeugt noch vernichtet werden kann. Unter Vernachlässigung der Wärmeenergie entspricht die Änderung der inneren Energie  $\dot{U}$  eines Systems der Änderung der am System geleisteten Arbeiten  $\dot{W}$ . Im Fall piezoelektrischer Materialien leisten die Spannungen  $\sigma_{ij}$  Formänderungsarbeit auf den Dehnungsraten  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  und das elektrische Feld  $\tilde{E}_i$  leistet elektrische Arbeit auf der Rate der dielektrischen Verschiebung  $\dot{\tilde{D}}_i$ , es folgt

$$\dot{U} = \dot{W} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \tilde{E}_i \dot{\tilde{D}}_i . \quad (3.1)$$

Unabhängige Variablen sind hier  $\varepsilon_{ij}$  und  $\tilde{D}_i$ . Für viele Anwendungen ist es sinnvoll, das direkt messbare elektrische Feld  $\tilde{E}_i$  als unabhängige Variable zu verwenden. Mit



der Legendre-Transformation ist es möglich, die Abhängigkeiten in der Funktion (3.1) zu ändern. Die freie Enthalpie  $H$  beschreibt das thermodynamische Potential mit den unabhängigen Variablen  $\varepsilon_{ij}$  und  $\tilde{E}_i$ ,

$$\begin{aligned} H(\varepsilon_{ij}, \tilde{E}_i) &= U(\varepsilon_{ij}, \tilde{D}_i) - \left( \frac{\partial U}{\partial \tilde{D}_i} \right)_{\varepsilon_{ij}} \tilde{D}_i \\ &= U(\varepsilon_{ij}, \tilde{D}_i) - \tilde{E}_i \tilde{D}_i . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Durch Gleichsetzen der Zeitableitung der freien Enthalpie

$$\begin{aligned} \dot{H}(\varepsilon_{ij}, \tilde{E}_i) &= \dot{U}(\varepsilon_{ij}, \tilde{D}_i) - \tilde{E}_i \dot{\tilde{D}}_i - \dot{\tilde{E}}_i \tilde{D}_i \\ &= \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\tilde{E}}_i \tilde{D}_i \end{aligned} \quad (3.3)$$

mit dem totalen Differential

$$\dot{H}(\varepsilon_{ij}, \tilde{E}_i) = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial H}{\partial \tilde{E}_i} \dot{\tilde{E}}_i \quad (3.4)$$

erhält man

$$\left( \sigma_{ij} - \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \left( \tilde{D}_i + \frac{\partial H}{\partial \tilde{E}_i} \right) \dot{\tilde{E}}_i = 0 . \quad (3.5)$$

Gleichung (3.5) soll für beliebige Raten  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  und  $\dot{\tilde{E}}_i$  erfüllt sein, womit die Zustandsgrößen als partielle Ableitung der freien Enthalpie nach den konjugierten Größen definiert sind zu

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \text{und} \quad \tilde{D}_i = - \frac{\partial H}{\partial \tilde{E}_i} . \quad (3.6)$$

Die zunächst unbekannte freie Enthalpie lässt sich in einer Taylor-Reihe um einen Ausgangszustand  $H_0$  entwickeln. Für die Beschreibung linearen Materialverhaltens ist es ausreichend, die Reihe nach dem ersten Reihenglied abubrechen. Das nullte Reihenglied verschwindet, wenn das Ausgangssystem frei von Eigenspannungen ist, es folgt

$$H = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{kl} + 2 \varepsilon_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \tilde{E}_j} \tilde{E}_j + \tilde{E}_i \frac{\partial^2 H}{\partial \tilde{E}_i \partial \tilde{E}_j} \tilde{E}_j \right) . \quad (3.7)$$

Die Materialkonstanten zur Beschreibung linearen Materialverhaltens sind als zweite partielle Ableitung der freien Enthalpie nach den Zustandsgrößen definiert. Unter Verwendung der Zustandsgrößen nach Gleichung (3.6) gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} &= + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = + C_{ijkl} \quad [\text{N/m}^2] , \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \tilde{E}_i \partial \tilde{E}_j} &= - \frac{\partial \tilde{D}_i}{\partial \tilde{E}_j} = - \tilde{\epsilon}_{ij} \quad [\text{F/m}] , \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \tilde{E}_k} &= + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \tilde{E}_k} = - \frac{\partial \tilde{D}_k}{\partial \varepsilon_{ij}} = - e_{ijk} \quad [\text{C/m}^2] . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Mit dem Elastizitätstensor vierter Stufe  $C_{ijkl}$ , dem piezoelektrischen Kopplungstensor dritter Stufe  $e_{ijk}$  und dem Permittivitätstensor zweiter Stufe  $\tilde{\epsilon}_{ij}$  gilt für die Enthalpie

$$H = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - 2 \varepsilon_{ij} e_{ijk} \tilde{E}_k - \tilde{E}_i \tilde{\epsilon}_{ij} \tilde{E}_j \right) . \quad (3.9)$$

Mit Gleichung (3.6) folgen die um die elektro-mechanische Kopplung erweiterten Materialgleichungen

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} \tilde{E}_k , \\ \tilde{D}_i &= e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \tilde{\epsilon}_{ik} \tilde{E}_k . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ein analoges Vorgehen führt auf alternative Formulierungen mit den Spannungen  $\sigma_{ij}$  und/oder der dielektrischen Verschiebung  $\tilde{D}_i$  als unabhängigen Variablen. Die vier möglichen Kombinationen sind in Tabelle 3.1 zusammengestellt. Elastizitätstensor  $C_{ijkl}$  und Nachgiebigkeitstensor  $S_{ijkl}$  bestimmen die mechanischen Eigenschaften, die Permittivitätstensoren  $\tilde{\epsilon}_{ik}$  und  $\tilde{\beta}_{ik}$  die elektrischen Eigenschaften, piezoelektrische Kopplungsfaktoren sind  $e_{ijk}$ ,  $d_{ijk}$ ,  $g_{ijk}$  und  $h_{ijk}$ . Die hochgestellten Indizes kennzeichnen die bei der Messung der Koeffizienten konstant gehaltenen Felder.

$\sigma - \tilde{D}$		$\varepsilon - \tilde{D}$	
$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{ijk} \tilde{E}_k$		$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}^E \sigma_{kl} + d_{ijk} \tilde{E}_k$	
$\tilde{D}_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \tilde{\epsilon}_{ik}^e \tilde{E}_k$		$\tilde{D}_i = d_{ikl} \sigma_{kl} + \tilde{\epsilon}_{ik}^\sigma \tilde{E}_k$	
$\varepsilon - \tilde{E}$		$\sigma - \tilde{E}$	
$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}^D \sigma_{kl} + g_{ijk} \tilde{D}_k$		$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^D \varepsilon_{kl} - h_{ijk} \tilde{D}_k$	
$\tilde{E}_i = -g_{ikl} \sigma_{kl} + \tilde{\beta}_{ik}^\sigma \tilde{D}_k$		$\tilde{E}_i = -h_{ikl} \varepsilon_{kl} + \tilde{\beta}_{ik}^e \tilde{D}_k$	

Tabelle 3.1: Alternative Formulierungen der Materialgleichungen

Das in Bild 3.4 dargestellte kartesische Koordinatensystem bildet den Ausgangspunkt für die Indizierung der piezoelektrischen Koeffizienten. Die Achsen 1, 2 und 3 spannen ein Rechtssystem auf, wobei Achse 3 in Richtung der Polarisierung zeigt. Das Material erhält infolge Polarisierung transversal-isotrope Eigenschaften, mit der Isotropieebene 1-2 und der Vorzugsrichtung 3. Die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten verringert sich aufgrund der Isotropieeigenschaften auf 10, es gibt 5 für die Beschreibung der Mechanik, 3 für die Piezoelektrik und 2 für die Dielektrizität.

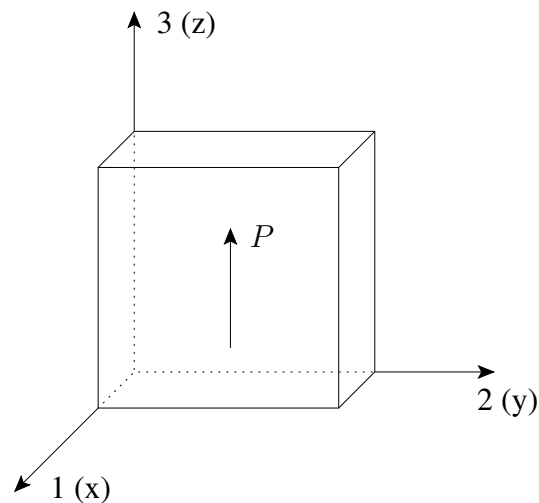


Bild 3.4: Koordinatensystem zur Indizierung piezokeramischer Materialien

Die drei in Bild 3.5 dargestellten Effekte charakterisieren maßgeblich das Verformungsverhalten piezoelektrischer Materialien. Wenn das elektrische Feld in Richtung der Polarisierung weist, führt der Longitudinaleffekt ( $e_{33}$ -Effekt) zu einer Dehnung in gleicher Richtung. Der Transversaleffekt ( $e_{31}$ -Effekt) bewirkt eine Dehnung quer zum angelegten elektrischen Feld, also in der Isotropieebene. Der Schereffekt ( $e_{51}$ -Effekt) tritt auf, wenn die Piezokeramik mit einem elektrischen Feld senkrecht zur Polarisationsrichtung beansprucht wird.

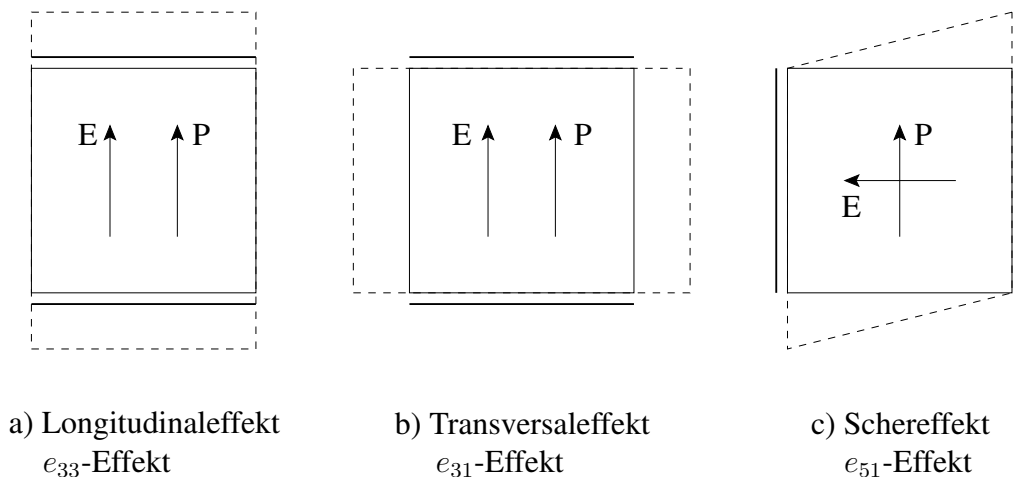


Bild 3.5: Piezoelektrische Effekte

Unter Ausnutzung der Symmetrie gilt für transversal-isotropes, in Richtung der Achse 3 polarisiertes, piezoelektrisches Material

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \tilde{D}_1 \\ \tilde{D}_2 \\ \tilde{D}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{311} \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{311} \\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{333} \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 & -e_{113} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 & -e_{113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{113} & 0 & \tilde{\epsilon}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{113} & 0 & \tilde{\epsilon}_{11} & 0 \\ e_{311} & e_{311} & e_{333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\epsilon}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_2 \\ \tilde{E}_3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Die Einträge des Elastizitätstensors sind über die Beziehungen

$$\begin{aligned} C_{1111} &= \frac{E_{11} - \nu_{13}^2 E_{33}}{\Delta}, & C_{1122} &= \frac{\nu_{13}^2 E_{33} + \nu_{12} E_{11}}{\Delta}, \\ C_{3333} &= \frac{E_{33} - \nu_{12}^2 E_{33}}{\Delta}, & C_{1133} &= \frac{\nu_{13} E_{33} + \nu_{12} \nu_{13} E_{33}}{\Delta}, \\ C_{1313} &= G_{13}, & C_{1212} &= \frac{E_{11}}{2(1 + \nu_{12})} \end{aligned} \quad (3.12)$$

und  $\Delta = 1 - \nu_{12}^2 - 2\nu_{13}^2 E_{33}/E_{11} - 2\nu_{12}\nu_{13}^2 E_{33}/E_{11}$  mit den Ingenieurkonstanten verknüpft. Tabelle 3.2 enthält die Materialkoeffizienten einiger gängiger piezoelektrischer Materialien, die im Rahmen dieser Arbeit zum Einsatz kommen.

		PIC 255	PZT 5a	PZT G1195	PVDF
$E_{11}$	[N/m <sup>2</sup> ]	62,00·10 <sup>9</sup>	61,00·10 <sup>9</sup>	148,00·10 <sup>9</sup>	2,00·10 <sup>9</sup>
$E_{33}$	[N/m <sup>2</sup> ]	49,75·10 <sup>9</sup>	53,20·10 <sup>9</sup>	131,00·10 <sup>9</sup>	2,00·10 <sup>9</sup>
$G_{13}$	[N/m <sup>2</sup> ]	23,13·10 <sup>9</sup>	21,10·10 <sup>9</sup>	74,20·10 <sup>9</sup>	0,75·10 <sup>9</sup>
$\nu_{12}$	[-]	0,34	0,35	k.A.	0,29
$\nu_{13}$	[-]	0,34	0,38	k.A.	0,29
$e_{31}$	[C/m <sup>2</sup> ]	-10,25	-7,21	-2,10	-0,044
$e_{33}$	[C/m <sup>2</sup> ]	12,93	15,12	9,50	k.A.
$e_{15}$	[C/m <sup>2</sup> ]	12,72	12,32	9,50	k.A.
$\tilde{\epsilon}_{11}$	[F/m]	1,46·10 <sup>-8</sup>	1,53·10 <sup>-8</sup>	40,71·10 <sup>-8</sup>	k.A.
$\tilde{\epsilon}_{33}$	[F/m]	1,55·10 <sup>-8</sup>	1,50·10 <sup>-8</sup>	20,80·10 <sup>-8</sup>	106,20·10 <sup>-8</sup>
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	7,80·10 <sup>3</sup>	7,75·10 <sup>3</sup>	7,50·10 <sup>3</sup>	1,80·10 <sup>3</sup>

Tabelle 3.2: Kennwerte piezoelektrischer Materialien nach [9], [17], [71]

### 3.4 Dielektrische Hysterese

Unter hohen elektrischen Einwirkungen zeigen piezokeramische Materialien ein stark nichtlineares Antwortverhalten das mit den Umklappvorgängen innerhalb der kristallinen Struktur zu erklären ist. Die Hysteresekurve in Bild 3.6a zeigt den qualitativen Verlauf der Polarisation  $P$  in Abhängigkeit des elektrischen Feldes  $\tilde{E}$ . Es wird ausschließlich die Polarisation in Richtung des elektrischen Feldes betrachtet. Wird an einer depolarisierten Probe ein elektrisches Feld angelegt, so ist die Polarisation zunächst reversibel, ① bis ②, bis schließlich alle Dipole in Richtung des elektrischen Feldes ausgerichtet sind und in ② die Sättigungspolarisation  $P_s$  erreicht ist. Eine weitere Steigerung des elektrischen Feldes führt wiederum zu reversibler Polarisation. Nach dem Zurückfahren des elektrischen Feldes, ② bis ③, bleiben die Domänen weitestgehend ausgerichtet und es verbleibt eine remanente Polarisation  $P_r$ . Wird nun ein negatives elektrisches Feld aufgebracht, geht die Polarisation zurück, bis das Material bei Erreichen der Koerzitivfeldstärke in ④ wieder vollständig depolarisiert ist.

Die Schmetterlingskurve in Bild 3.6b beschreibt das nichtlineare Materialverhalten über die Dehnungen  $\varepsilon$  in Abhängigkeit des elektrischen Feldes  $\tilde{E}$ . Ausgehend vom depolarisierten Zustand kann es nur positive Dehnungen geben. Analog zur Hysteresekurve können eine Sättigungsdehnung  $\varepsilon_s$  und eine remanente Dehnung  $\varepsilon_r$  identifiziert werden.

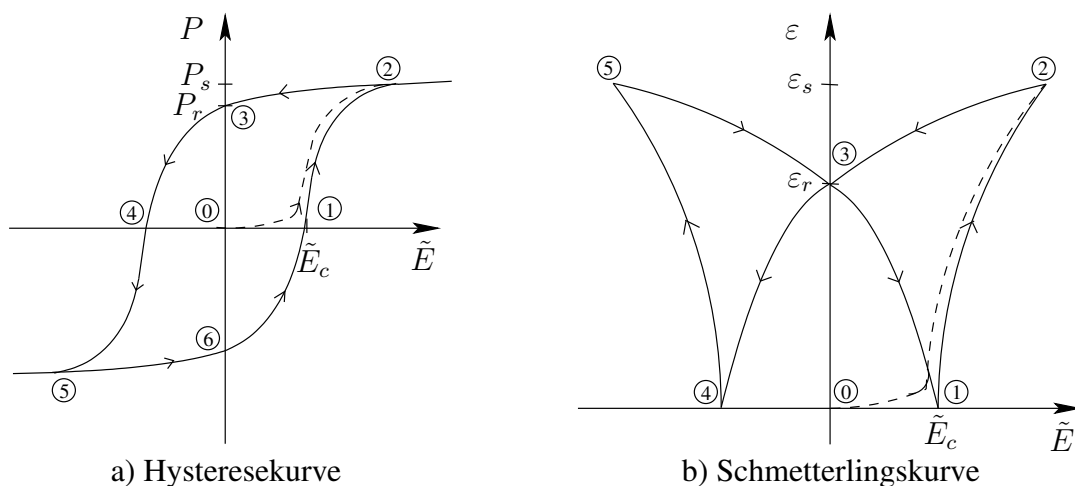


Bild 3.6: Nichtlineares piezokeramisches Materialverhalten

Während eines Umklappprozesses kommt es zu Verschiebungen in der atomaren Gitterstruktur, was auf Dauer zu einer Schädigung des Materials führt. Um die Lebensdauer eines piezokeramischen Aktuators zu erhöhen, ist es erforderlich, die elektri-

sche Feldstärke auf den Kleinsignalbereich zu begrenzen, sodass lediglich der Pfad ② - ③ durchlaufen wird. Mit dieser Einschränkung ist es gerechtfertigt, das Materialverhalten als näherungsweise linear zu betrachten. Das erste Drittel des Pfades ③ - ④ kann genutzt werden, um die Stellwege des Aktuators zu vergrößern und für eine bessere Ausnutzung des Materials zu sorgen. Die Annahme linearen Materialverhaltens ist dann aber nicht mehr aufrecht zu erhalten.

### 3.5 Bauelemente

Piezokeramische Bauelemente sind in vielfältiger Ausführung verfügbar. In Bild 3.7 sind die üblichen Grundelemente zusammengestellt.

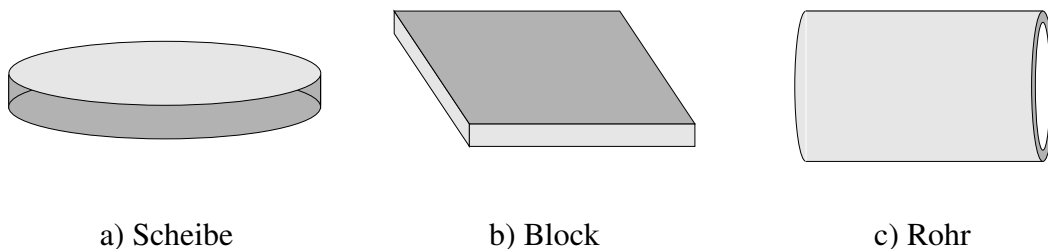


Bild 3.7: Piezokeramische Grundbauelemente

Die Dicke piezokeramischer Scheiben und Blöcke liegt gewöhnlich im Bereich 0,1 - 10 mm, der Durchmesser im Bereich 1 - 100 mm. Beide Grundelemente können sowohl als Dickenschwinger ( $e_{33}$ -Effekt) als auch als Radialschwinger ( $e_{31}$ -Effekt) genutzt werden. Piezokeramische Rohre können bis zu einer Länge von 100 mm und einem Durchmesser von 80 mm gefertigt werden. Die verfügbaren Abmessungen schwanken je nach Hersteller.

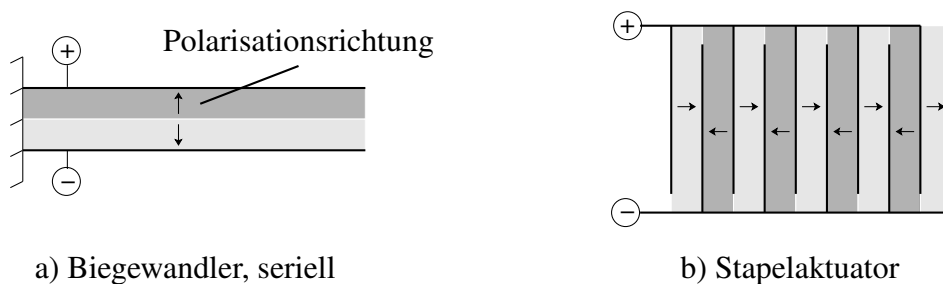
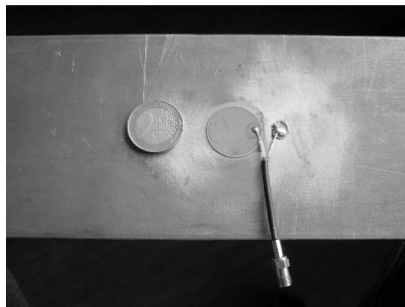


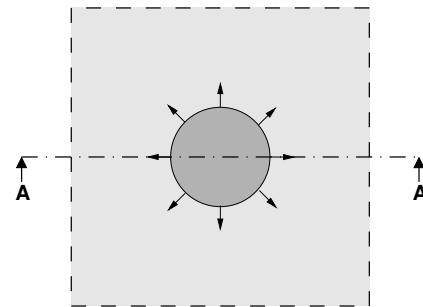
Bild 3.8: Zusammengesetzte Bauelemente

Es ist möglich, die Grundelemente auf verschiedene Art zu kombinieren, um deren Eigenschaften gezielt auszunutzen. In Bild 3.8 sind zwei Möglichkeiten dargestellt. Der Biegewandler besteht aus zwei (oder mehr) piezokeramischen Schichten, die

miteinander verklebt oder auf einer Trägerschicht befestigt sind und den  $e_{31}$ -Effekt ausnutzen. Die Stellwege piezokeramischer Bimorphe können einige Millimeter betragen. Die Piezokeramikelemente können dabei parallel oder in Reihe geschaltet werden. Auch Stapelaktuatoren haben zum Ziel, große Stellwege unter Ausnutzung des  $e_{33}$ -Effektes zu erzeugen. Das Stapeln vieler dünner Scheiben bietet den Vorteil, dass im Bereich einer Scheibe hohe elektrische Felder aufgebaut werden können. Stapelaktuatoren können hohe Druckkräfte und, wenn sie vorgespannt sind, auch Zugkräfte aufnehmen. Im Rahmen dieser Arbeit werden Aktuatoren vom Typ PIC255 der Firma *PI Ceramic* verwendet, siehe Bild 3.9. Die 0,5 mm dicken Scheibenelemente werden beidseitig auf dünnen Stahlblechen befestigt. Die gleichzeitige Ansteuerung beider Elemente erzeugt eine Membranschwingung im Blech, während eine um  $180^\circ$  phasenversetzte Ansteuerung eine reine Biegeschwingung erzeugt, siehe Bild 3.10.

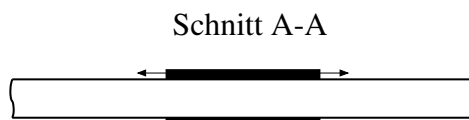


a) Photo

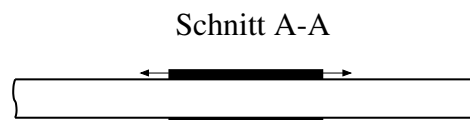


b) Aufsicht

Bild 3.9: Im Versuch eingesetzte piezokeramische Aktuatoren



a) Membranschwingung



b) Biegeschwingung

Bild 3.10: Ansteuerung verschiedener Schwingungsarten





## 4. Diskretisierung der elektro-mechanischen Modellgleichungen

Die Diskretisierung der elektro-mechanischen Modellgleichungen erfolgt im Rahmen dieser Arbeit mit der Finite-Elemente-Methode (FEM), die das am häufigsten eingesetzte Verfahren zur Berechnung piezoelektrischer Systeme darstellt. Vereinzelt kommt auch die Rand-Elemente-Methode (REM) zum Einsatz, siehe *Kögl* [55]. Analytische Lösungen liegen nur für geometrisch einfache Systeme vor, siehe z. B. *Benjeddou et al.* [8].

Nach Aufbereitung der Grundgleichungen erfolgt die Überführung der Grundgleichungen in eine schwache Form des Gleichgewichts unter Berücksichtigung der elektro-mechanischen Kopplung. Die Standardelemente für die Modellierung von piezoelektrischen Scheiben-, Balken- und Plattensystemen werden hergeleitet und numerisch untersucht. Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Makroelement ermöglicht eine effiziente Berechnung, wenn verhältnismäßig kleine piezoelektrische Elemente auf dünnen, großflächigen Scheibentragwerken befestigt sind und diese zum Schwingen anregen.

### 4.1 Elektro-mechanische Modellgleichungen

Der mechanische Anteil der gekoppelten Feldgleichungen folgt mit dem Impulssatz

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} - b \dot{u}_i . \quad (4.1)$$

Die zeitliche Änderung  $\rho \ddot{u}_i$  des Impulses setzt sich aus den am Körper angreifenden äußeren Kräften und den dissipativen Anteilen  $-b \dot{u}_i$  zusammen. Randbedingungen können vorgegebene Randverschiebungen  $u_i = \bar{u}_i$  auf  $\Gamma_u$  und Randspannungen  $\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i$  auf  $\Gamma_\sigma$  sein. Bei den hier vorliegenden kleinen Verzerrungen ist die Kinetik mit dem linearen Anteil des Verzerrungstensors beschreibbar,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) . \quad (4.2)$$

Für das elektrostatische Gleichgewicht in Dielektrika gilt

$$\tilde{D}_{i,i} = 0 , \quad (4.3)$$

mit der dielektrischen Verschiebung  $\tilde{D}_i$ . Randbedingungen sind die elektrische Potentialdifferenz  $\tilde{\phi}_i = \bar{\phi}_i$  auf  $\Gamma_\phi$  und die elektrische Oberflächenladung  $\tilde{D}_i n_i = -\bar{q}$  auf  $\Gamma_D$ . Das elektrische Potential  $\tilde{\phi}$  ist eine skalare Größe und über

$$\tilde{E}_i = -\tilde{\phi}_{,i} \quad (4.4)$$

mit dem elektrischen Feld  $\tilde{E}_i$  verknüpft. Die Materialgleichungen sind bereits in Gleichung (3.10) angegeben. Tabelle 4.1 zeigt die Parallelen zwischen mechanischen und elektrischen Grundgleichungen auf.

Mechanik			Elektrik	
Feldgrößen	Verschiebung	$u_i$	Potential	$\tilde{\phi}$
Kinematik	Verzerrungen	$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$	elektr. Feld	$\tilde{E}_i = -\tilde{\phi}_{,i}$
Gleichgew.	Impulsbilanz	$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} - b \dot{u}_i$	elektr. Bilanz	$\tilde{D}_{i,i} = 0$
Materialgleichungen		$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} \tilde{E}_k$		
		$\tilde{D}_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \tilde{\epsilon}_{ik} \tilde{E}_k$		
Dirichlet-RB	Randversch.	$u_i = \bar{u}_i$	Randpotential	$\tilde{\phi} = \bar{\phi}$
Neumann-RB	Randspannung	$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i$	Oberfl.-ladung	$\tilde{D}_i n_i = -\bar{q}$

Tabelle 4.1: Analogie zwischen mechanischen und elektrischen Grundgleichungen

## 4.2 Finite-Elemente-Formulierung für piezoelektrisches Verhalten

Die schwache Formulierung der Bewegungsgleichung enthält mit dem Prinzip von d'Alembert auch Anteile aus Massenträgheit und Dämpfungskräften.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebung ist eine den Grundgleichungen (4.1) und (4.3) äquivalente Formulierung und lautet unter Vernachlässigung der Volumenkräfte

$$\begin{aligned} -\delta A_u = & + \int_V \delta u_i \rho \ddot{u}_i dV + \int_V \delta u_i b \dot{u}_i dV + \int_V \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV - \int_A \delta u_i p_i dA = 0 \quad , \\ -\delta A_\phi = & - \int_V \delta \tilde{E}_i \tilde{D}_i dV + \int_A \delta \tilde{\phi} \tilde{q} dA = 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nach Einsetzen der Materialgleichungen (3.10) und der Kinematik entsprechend den Gleichungen (4.2) und (4.4) folgen die Arbeitsgleichungen

$$\begin{aligned} -\delta A_u = & + \int_V \delta u_i \rho \ddot{u}_i dV + \int_V \delta u_i b \dot{u}_i dV \\ & + \int_V \delta u_{i,j} C_{ijkl} u_{k,l} dV + \int_V \delta u_{i,j} e_{ijk} \tilde{\phi}_{,k} dV - \int_A \delta u_i p_i dA = 0 \quad , \\ -\delta A_\phi = & + \int_V \delta \tilde{\phi}_{,i} e_{ikl} u_{k,l} dV - \int_V \delta \tilde{\phi}_{,i} \tilde{\epsilon}_{ik} \tilde{\phi}_{,k} dV + \int_A \delta \tilde{\phi} \tilde{q} dA = 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die FEM beschreibt die unbekannten Feldgrößen im Element mit den Ansatzfunktionen  $\Omega_u$  und  $\Omega_\phi$  und den Knotenfreiwerten  $\hat{u}$  und  $\hat{\phi}$ . In Matrixschreibweise gilt

$$\mathbf{u} = \Omega_u \hat{u} \quad \text{und} \quad \tilde{\phi} = \Omega_\phi \hat{\phi} . \quad (4.7)$$

Die Verzerrungen und das elektrische Feld sind mit

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H}_u \hat{u} = \mathbf{D}_u \Omega_u \hat{u} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = \mathbf{H}_\phi \hat{\phi} = \mathbf{D}_\phi \Omega_\phi \hat{\phi} \quad (4.8)$$

gegeben, wenn die Differentialoperatoren  $\mathbf{D}$  auf die Ansatzfunktionen angewendet werden. Auf Elementebene folgen die virtuellen Arbeiten

$$\begin{aligned} -\delta \mathbf{A}_{u,el} &= \delta \hat{u}^T \left\{ \underbrace{\int_V \Omega_u^T \rho \Omega_u dV}_{\mathbf{M}_{uu}} \ddot{\hat{u}} + \underbrace{\int_V \Omega_u^T b \Omega_u dV}_{\mathbf{B}_{uu}} \dot{\hat{u}} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\int_V \mathbf{H}_u^T \mathbf{C} \mathbf{H}_u dV}_{\mathbf{K}_{uu}} \hat{u} + \underbrace{\int_V \mathbf{H}_u^T \mathbf{e} \mathbf{H}_\phi dV}_{\mathbf{K}_{u\phi}} \hat{\phi} - \underbrace{\int_A \Omega_u^T \mathbf{p} dA}_{\mathbf{f}_u} \right\} , \\ -\delta \mathbf{A}_{\phi,el} &= \delta \hat{\phi}^T \left\{ \underbrace{\int_V \mathbf{H}_\phi^T \mathbf{e}^T \mathbf{H}_u dV}_{\mathbf{K}_{\phi u}} \hat{u} - \underbrace{\int_V \mathbf{H}_\phi^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{H}_\phi dV}_{\mathbf{K}_{\phi\phi}} \hat{\phi} + \underbrace{\int_A \Omega_\phi^T \mathbf{q} dA}_{\mathbf{f}_\phi} \right\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

und somit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\delta \mathbf{A}_{u,el} &= \delta \hat{u}^T \{ \mathbf{M}_{uu} \ddot{\hat{u}} + \mathbf{B}_{uu} \dot{\hat{u}} + \mathbf{K}_{uu} \hat{u} + \mathbf{K}_{u\phi} \hat{\phi} - \mathbf{f}_u \} , \\ -\delta \mathbf{A}_{\phi,el} &= \delta \hat{\phi}^T \{ \mathbf{K}_{\phi u} \hat{u} - \mathbf{K}_{\phi\phi} \hat{\phi} + \mathbf{f}_\phi \} . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Massenmatrix  $\mathbf{M}_{uu}$ , Dämpfungsmatrix  $\mathbf{B}_{uu}$  und Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{uu}$  beschreiben die Mechanik, die Permittivitätsmatrix  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  die Elektrik. Die elektro-mechanische Kopplung erfolgt mit den Matrizen  $\mathbf{K}_{u\phi}$  für den direkten piezoelektrischen Effekt und  $\mathbf{K}_{\phi u}$  für den inversen piezoelektrischen Effekt. Auch der Elementlastvektor setzt sich aus einem mechanischen Anteil  $\mathbf{f}_u$  und einem elektrischen Anteil  $\mathbf{f}_\phi$  zusammen. Elementfreiwerte sind die Knotenweggrößen  $\hat{u}$  und das elektrische Potential  $\hat{\phi}$ . Die schwache Form erfüllt das Gleichgewicht nur integral über das gesamte Gebiet und nicht auf Elementebene, wohingegen Kinematik und Materialverhalten auch auf Elementebene exakt erfüllt sind.

#### 4.2.1 Scheibenelement

Scheibentragwerke tragen alle Lasten in der Tragwerksebene ab. Unter Annahme eines ebenen Spannungszustandes oder eines ebenen Verzerrungszustandes ist es möglich, alle mechanischen Grundgleichungen in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene aufzustellen. Im Rahmen dieser Arbeit findet ausschließlich der ebene Spannungszustand Berücksichtigung. Dieser eignet sich zur Beschreibung dünner Tragwerke, wenn die Spannungen

senkrecht zur Tragwerksebene vernachlässigbar sind. Piezoelektrische Scheibenelemente bestehen, wie in Bild 4.1b dargestellt, aus einer dünnen piezoelektrischen Trägerschicht auf der beidseitig Elektroden befestigt sind. Die Elektroden bestehen aus einer dünnen Silber- oder Kupferschicht, deren Steifigkeit nicht berücksichtigt wird. Piezoelektrische Scheibenelemente nutzen ausschließlich den  $e_{31}$ -Effekt. Vereinfachend erfolgt die Annahme, dass das elektrische Feld in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene für dünne Tragwerke vernachlässigbar ist. Zusammengefasst gilt

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \tilde{E}_1 = \tilde{E}_2 = 0 . \quad (4.11)$$

Die Materialgleichungen für linear-elastisches Materialverhalten nach Gleichung (3.11) vereinfachen sich unter Berücksichtigung der getroffenen Annahmen zu

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \tilde{D}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} - \frac{C_{1133}C_{1133}}{C_{3333}} & C_{1122} - \frac{C_{1133}C_{1133}}{C_{3333}} & 0 & -e_{311} + \frac{e_{333}C_{1133}}{C_{3333}} \\ C_{1122} - \frac{C_{1133}C_{1133}}{C_{3333}} & C_{1111} - \frac{C_{1133}C_{1133}}{C_{3333}} & 0 & -e_{311} + \frac{e_{333}C_{1133}}{C_{3333}} \\ 0 & 0 & C_{1212} & 0 \\ e_{311} - \frac{e_{333}C_{1133}}{C_{3333}} & e_{311} - \frac{e_{333}C_{1133}}{C_{3333}} & 0 & \tilde{e}_{33} + \frac{e_{333}^2}{C_{3333}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \tilde{E}_3 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

wobei die aus der Kondensation resultierenden Ausdrücke nachfolgend mit  $()^*$  gekennzeichnet werden,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \tilde{D}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111}^* & C_{1122}^* & 0 & -e_{311}^* \\ C_{1122}^* & C_{1111}^* & 0 & -e_{311}^* \\ 0 & 0 & C_{1212} & 0 \\ e_{311}^* & e_{311}^* & 0 & \tilde{e}_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \tilde{E}_3 \end{bmatrix} . \quad (4.13)$$

In Bild 4.1a sind alle Größen definiert, die zur Beschreibung eines Scheibenelementes mit den unbekannten Verschiebungsfeldern  $u_1$ ,  $u_2$  und dem unbekannten elektrischen Potential  $\tilde{\phi}_3$  erforderlich sind. Mit den Differentialoperatoren nach Gleichung (4.8) ergibt sich die Formulierung der Kinematik in Matrizenschreibweise zu

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \tilde{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \tilde{\phi}_3 \end{bmatrix} . \quad (4.14)$$

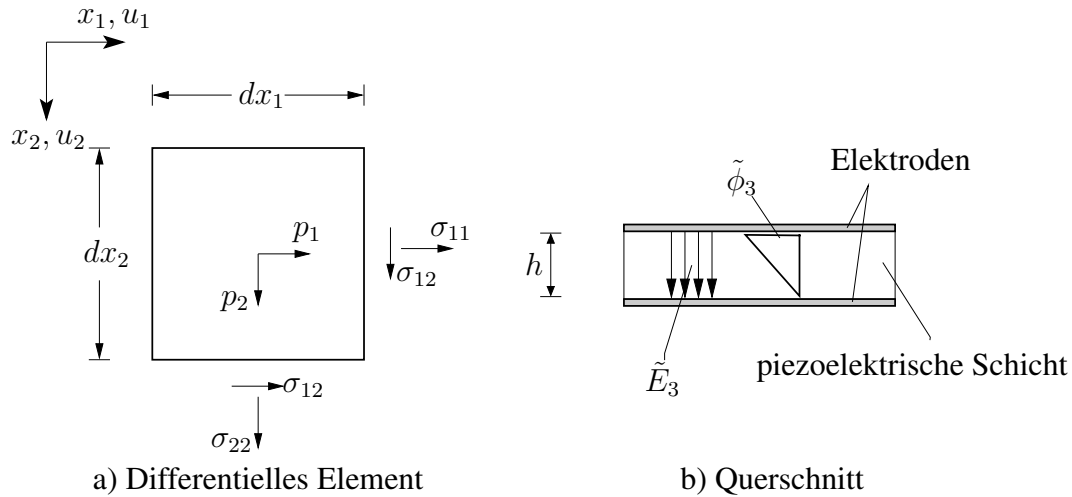


Bild 4.1: Piezoelektrisches Scheibenelement

Im Folgenden werden die in Tabelle 4.2 aufgelisteten piezoelektrischen Scheibenelemente untersucht. Die entsprechenden rein mechanischen Elemente sind u. a. in *Bathe* [6] beschrieben. Die für die Verschiebungen gewählten linearen und quadratischen Ansatzfunktionen erfüllen alle Konvergenzkriterien. Das elektrische Feld  $\tilde{E}_3$  breitet sich zwischen den Elektroden, also normal zur  $x_1$ - $x_2$ -Ebene aus und ist im gesamten Bereich der Elektrode näherungsweise konstant. Das elektrische Potential  $\tilde{\phi}_3(x_3)$  ist daher mit einem einzigen Elementfreiheitsgrad beschreibbar. Zunächst wird eine lineare Ansatzfunktion über die Bauteildicke mit dem konjugierten Freiwert  $\tilde{\phi}_3$  gewählt, siehe Bild 4.1b. Zwei Randbedingungen sind gegeben: Wenn die Unterseite geerdet ist,  $\tilde{\phi}_3(x_3 = 0) = 0$  und auf der Oberseite die Potentialdifferenz  $\tilde{\phi}_3(x_3 = h) = \bar{\phi}_3$  auftritt, folgt die Ansatzfunktion

$$\Omega_{\tilde{\phi}} = \frac{x_3}{h} . \quad (4.15)$$

Element	Knoten	Ansatz		Unbekannte		
		$u_1, u_2$	$\tilde{\phi}_3$	mech.	elektr.	ges.
□	4	linear	linear	8	1	9
△	6	quadrat.	linear	12	1	13
⊠	8/9	quadrat.	linear	16/18	1	17/19

Tabelle 4.2: Piezoelektrische Scheibenelemente

Die in Bild 4.2 dargestellte piezoelektrische Scheibe aus PZT ist in Dickenrichtung polarisiert und über zwei vertikal angeordnete Elektrodenpaare ansteuerbar.

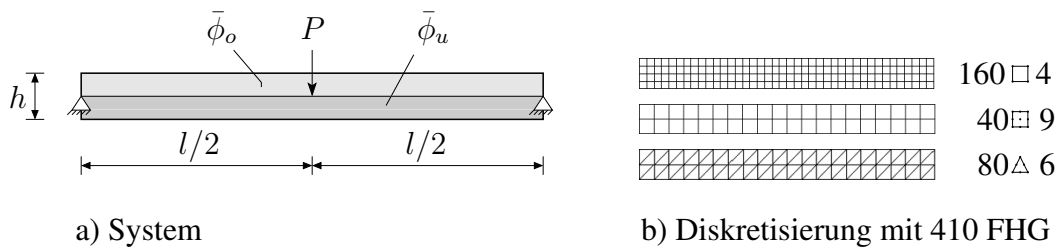


Bild 4.2: Piezoelektrische Scheibe

Zunächst erfolgt die Untersuchung des elektrisch kurzgeschlossenen Systems. In diesem Fall trägt ausschließlich die Mechanik zum Lastabtrag bei, eine elektro-mechanische Kopplung liegt nicht vor. In Bild 4.3a ist das Konvergenzverhalten der unterschiedlichen Elemente zu erkennen. Dargestellt ist die Mittendurchbiegung  $v_M$  infolge der Einzelast  $P = 100 \text{ N}$  bezogen auf die analytische Lösung für den Bernoulli-Balken  $w_B$ . Die Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen für die Verschiebungen weisen eine wesentlich bessere Konvergenz auf und liefern bei gleicher Anzahl von Unbekannten bessere Ergebnisse als Elemente mit linearen Ansatzfunktionen. Die schlechte Konvergenz letzterer Elemente ist auf einen numerisch bedingten Versteifungseffekt, das Schublocking, zurückzuführen. Die selektiv reduzierte Integration der Elementmatrizen kann hier zu einer Verbesserung der Lösung führen, siehe Zienkiewicz *et al.* [95].

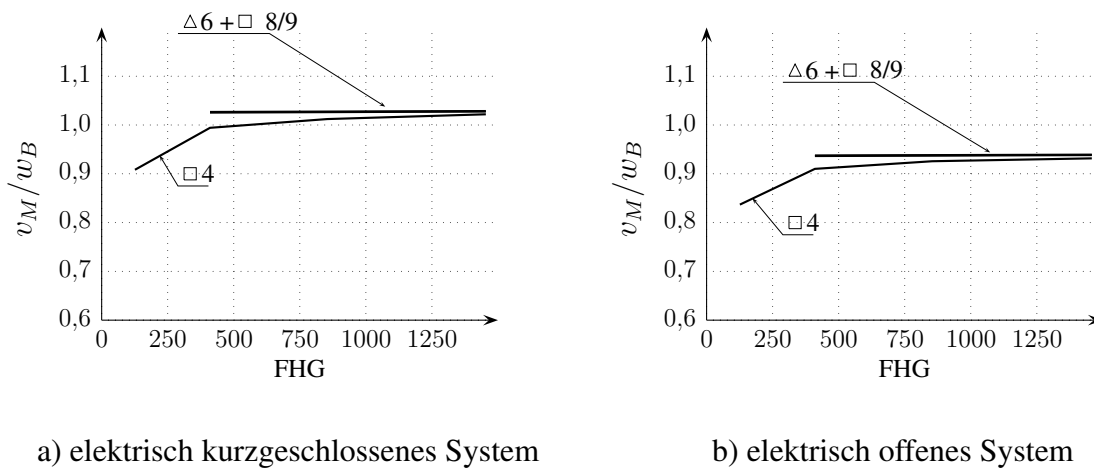


Bild 4.3: Mittendurchbiegung infolge Einzelast

Das elektrisch offene System lässt ein ganz ähnliches Konvergenzverhalten erkennen, siehe Bild 4.3b. Allerdings reagiert das System jetzt aufgrund der elektro-mechanischen Kopplung wesentlich steifer. Die elektrische Oberflächenladung kann nicht mehr abfließen und wirkt daher aktiv auf das System ein. Im Bereich einer Elektrode ist das elektrische Feld  $\tilde{E}_3$  konstant. Die elektrisch leitende Oberfläche gleicht Differenzen im elektrischen Feld infolge unterschiedlicher mechanischer Verzerrungen

aus. Der Versteifungseffekt elektrisch offener Systeme ist demnach umso stärker, je mehr Elektroden auf der Oberfläche appliziert sind. Die elektrische Energie wirkt dann lokal im Bereich starker Verzerrungen und kann nicht in andere Bereiche abfließen.

Diesen Effekt soll das Beispiel in Bild 4.4a verdeutlichen. Gegenüber dem elektrisch kurzgeschlossenen System ist die Mittendurchbiegung des elektrisch offenen Systems um 8,7% geringer, wenn das System mit 2 Elektrodenpaaren versehen ist. Bei der Verwendung von 160 Elektrodenpaaren reduziert sich die Mittendurchbiegung um 13,9%. Es ist deutlich erkennbar, wie sich das elektrische Potential dem Verzerrungsfeld anpasst.

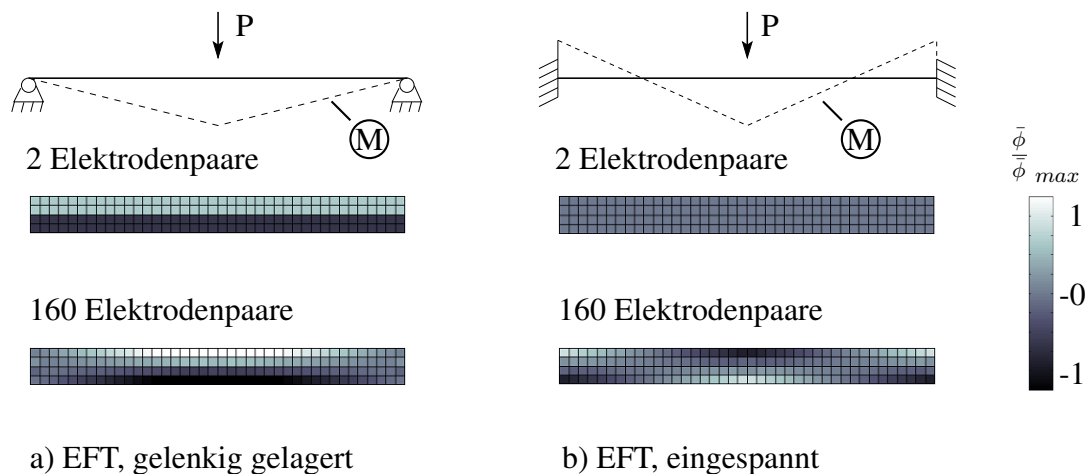


Bild 4.4: Auswirkung unterschiedlich angeordneter Elektroden

Noch wesentlich größer ist der Effekt bei der beidseitig eingespannten Scheibe in Bild 4.4b. Hier geht die Mittendurchbiegung des Systems mit 2 Elektrodenpaaren aufgrund des wechselnden Vorzeichens in der Momentenlinie lediglich um 0,1% zurück. Bei 160 Elektrodenpaaren ist ein Rückgang von 13,0% zu verzeichnen. Diese Untersuchung zeigt den Einfluss der elektrischen Randbedingungen auf das Systemverhalten. In der Praxis stellt sich die Frage, wieviele Elektroden sinnvollerweise auf einer piezoelektrischen Struktur anzuordnen sind. Theoretisch ist der Einsatz von Interdigitalelektroden möglich, mit denen das elektrische Feld im gesamten Bereich einer Elektrode variabel ansteuerbar ist. Für großflächige Strukturen sind dem Autor aber keine Anwendungen bekannt.

#### 4.2.2 Balkenelement

Der Bernoulli-Balken trägt alle Lasten über Biegung ab. Der Querschnitt des verformten Systems bleibt gemäß der Bernoulli-Hypothese eben, womit die Arbeit, die die Querkraft auf den Schubverzerrungen leistet, verschwindet. Die Dehnungen des Balkenquerschnitts sind proportional zur Verkrümmung der neutralen Faser,  $\varepsilon(x_3) = -\kappa x_3$ . In Bild 4.5a ist ein differentielles Balkenelement dargestellt, an das sich die Definition der Vorzeichen anlehnt. Die Unbekannten der Weggrößenformulierung sind die Biegelinie  $w(x_1)$  und das elektrische Potential  $\tilde{\phi}(x_3)$ . Kinematik und Differentialoperatoren sind festgelegt über

$$\begin{bmatrix} \kappa \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_w & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \phi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \kappa \\ \tilde{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{11} & 0 \\ 0 & -\partial_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \tilde{\phi}_3 \end{bmatrix} . \quad (4.16)$$

Die Herleitung des mechanischen Elementes ist z.B. *Bathe* [6] zu entnehmen. In diesem Abschnitt erfolgt die Herleitung des in Bild 4.5b dargestellten piezoelektrischen Balkenelementes. Der symmetrisch aufgebaute Balkenquerschnitt besteht aus einer rein mechanischen Trägerschicht, auf der beidseitig eine piezoelektrische Schicht befestigt ist. Zwischen den einzelnen Schichten wird ein idealer Verbund vorausgesetzt und der Einfluss der Klebeschicht vernachlässigt.

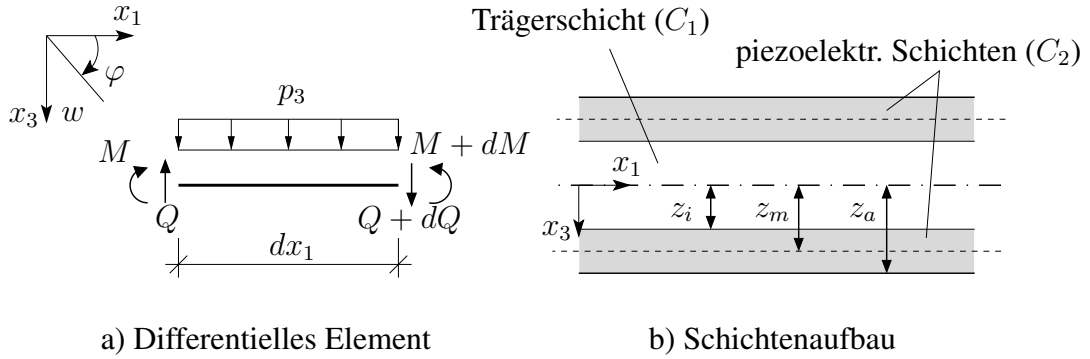


Bild 4.5: Piezoelektrisches Balkenelement

Das Balkenelement nutzt den piezoelektrischen  $e_{31}$ -Effekt, also die mechanischen Größen in  $x_1$ -Richtung gekoppelt mit dem elektrischen Feld in  $x_3$ -Richtung. Zusätzlich zu den mechanischen Größen geht der elektro-mechanische Anteil mit dem Hebelarm  $x_3$  in die Momentenbilanz ein. Für einen Balken der Breite  $b$  folgen die erweiterten Materialgleichungen nach Integration über die Schichtdicken zu

$$\begin{aligned} M &= -2b \int_0^{z_i} (C_1 \kappa x_3^2) dx_3 - 2b \int_{z_i}^{z_a} (C_2 \kappa x_3^2 + e_{31} \tilde{E}_3 x_3) dx_3 , \\ \int \tilde{D} &= 2b \int_{z_i}^{z_a} (e_{31} \kappa x_3 + \tilde{\epsilon}_{33} \tilde{E}_3) dx_3 . \end{aligned} \quad (4.17)$$



Nach Einsetzen der Materialgleichungen (4.17) und der Kinematik (4.16) in Gleichung (4.5) folgen die Arbeitsgleichungen für den piezoelektrischen Bernoullibalken,

$$\begin{aligned}
-\delta A_u &= 2b \frac{1}{3} z_i^3 \int_0^l \delta w_{,11} C_1 w_{,11} dx_1 - \int_0^l \delta w p_3 dx_1 \\
&+ 2b \frac{1}{3} (z_a^3 - z_i^3) \int_0^l \delta w_{,11} C_2 w_{,11} dx_1 - 2b \frac{1}{2} (z_a^2 - z_i^2) \int_0^l \delta w_{,11} e_{31} \tilde{\phi}_{,3} dx_1 , \\
-\delta A_\phi &= 2b \frac{1}{2} (z_a^2 - z_i^2) \int_0^l \delta \tilde{\phi}_{,3} e_{31} w_{,11} dx_1 - 2b (z_a - z_i) \int_0^l \delta \tilde{\phi}_{,3} \tilde{\epsilon}_{33} \tilde{\phi}_{,3} dx_1 \\
&- 2b \int_0^l \delta \tilde{\phi} \tilde{q} dx_1 .
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Die Beschreibung der Biegelinie erfolgt mit Hermite-Polynome-Ansätzen für die Knotenverschiebungen  $w$  und die Knotenverdrehungen  $\varphi$ . Für die Beschreibung des elektrischen Potentials wird zunächst ein linearer Ansatz gewählt, um das elektrische Feld nach Gleichung (4.4) konstant zu approximieren. Die Ansteuerung einer piezoelektrischen Schicht erfolgt über zwei Elektroden, von denen jeweils die innenliegende Elektrode geerdet ist,  $\tilde{\phi}(z_i) = 0$ . Auf den äußeren Elektroden tritt die elektrische Potentialdifferenz  $\tilde{\phi}(z_a) = \bar{\phi}$  auf, siehe Bild 4.6b. Die lineare Ansatzfunktion für das elektrische Potential der  $k$ -ten Schicht folgt zu

$$\tilde{\phi}_3 = \frac{x_3 - z_{ki}}{z_{ka} - z_{ki}} \bar{\phi} = \Omega_\phi \bar{\phi} , \tag{4.19}$$

mit dem konjugierten Freiheitsgrad  $\bar{\phi}$ . Für das elektrische Feld gilt

$$\tilde{E}_3 = -\frac{\bar{\phi}}{z_{ka} - z_{ki}} = \mathbf{D}_\phi \Omega_\phi \bar{\phi} . \tag{4.20}$$

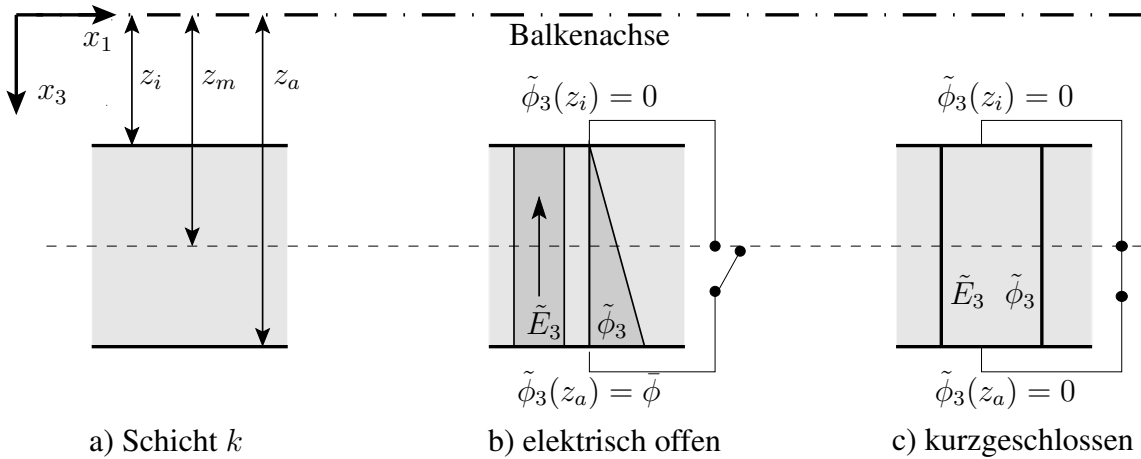


Bild 4.6: Lineare Ansatzfunktion für das elektrische Potential

Aufgrund des symmetrischen Aufbaus ist ein zusätzlicher Freiheitsgrad für die Beschreibung beider piezoelektrischen Schichten ausreichend. Die Berücksichtigung beliebig vieler Schichten ist möglich, soll im Rahmen dieser Arbeit jedoch nur für das im nächsten Kapitel vorgestellte Plattenelement weiterverfolgt werden. Für das 3-schichtige piezoelektrische Balkenelement kann man alle Ansatzfunktionen analytisch integrieren. Auf Elementebene folgt das Gleichungssystem

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} \frac{12A^*}{l^3} & \frac{6A^*}{l^2} & -\frac{12A^*}{l^3} & \frac{6A^*}{l^2} & 0 \\ \frac{6A^*}{l^2} & \frac{4A^*}{l} & -\frac{6A^*}{l^2} & \frac{2A^*}{l} & -B^* \\ -\frac{12A^*}{l^3} & -\frac{6A^*}{l^2} & \frac{12A^*}{l^3} & -\frac{6A^*}{l^2} & 0 \\ \frac{6A^*}{l^2} & \frac{2A^*}{l} & -\frac{6A^*}{l^2} & \frac{4A^*}{l} & B^* \\ \hline 0 & -B^* & 0 & B^* & -lC^* \end{array} \right] \begin{bmatrix} w_A \\ \varphi_A \\ w_B \\ \varphi_B \\ \bar{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{2}D^* \\ \frac{l^2}{12}D^* \\ \frac{l}{2}D^* \\ -\frac{l^2}{12}D^* \\ -lE^* \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

mit

$$\begin{aligned} A^* &= 2bC_1 \frac{1}{3} z_i^3 + 2bC_2 \frac{1}{3} (z_a^3 - z_i^3) , \\ B^* &= 2be_{31} z_m , & C^* &= 2b \frac{\tilde{\epsilon}_{33}}{z_a - z_i} , \\ D^* &= bp , & E^* &= 2b\tilde{q} . \end{aligned}$$

Für das in Bild 4.6c dargestellte elektrisch kurzgeschlossene System verschwindet bei Verwendung eines linearen Ansatzes das elektrische Potential und somit auch das elektrische Feld; eine elektro-mechanische Kopplung ist nun nicht mehr vorhanden.

In der Literatur ist eine Vielzahl von Beiträgen zu finden, die sich mit höheren Ansätzen für das elektrische Potential beschäftigen, siehe *Benjeddou et al.* [8] [11], *Butz* [13] oder *Kögl et al.* [56]. Analog zu *Mesecke* [71] soll nachfolgend ein quadratischer Ansatz,

$$\tilde{\phi}(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 , \quad (4.22)$$

für das Balkenelement eingeführt werden. Neben den beiden bereits für die lineare Ansatzfunktion genutzten Randbedingungen ist jetzt eine zusätzliche Bedingung erforderlich, um den Funktionsverlauf eindeutig zu bestimmen. Diese folgt aus der Maxwell-Gleichung für statische Felder (4.3). Für die dielektrische Verschiebung nach Gleichung (3.10) gilt unter Berücksichtigung der Kinematik

$$\tilde{D}_3 = -x_3 e_{31} w_{,11} - \tilde{\epsilon}_{33} \tilde{\phi}_{,3} , \quad (4.23)$$

und nach Differentiation nach  $x_3$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{3,3} &= -e_{31} w_{,11} - \tilde{\epsilon}_{33} \tilde{\phi}_{,33} = 0 \\ \Rightarrow \tilde{\phi}_{,33} &= -\frac{e_{31}}{\tilde{\epsilon}_{33}} w_{,11} . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Aus Gleichung (4.24) ist bereits ersichtlich, dass ein linearer Ansatz für das elektrische Potential nicht ausreicht, um die Maxwell-Gleichung zu erfüllen. Es ist mindestens ein quadratischer Ansatz erforderlich, um alle Anteile aus Verkrümmung korrekt zu erfassen und damit die Ladungserhaltung sicherzustellen. Nach Auswertung der Randbedingungen folgt der quadratische Ansatz für das elektrische Potential

$$\tilde{\phi}_3 = + \frac{x_3 - z_i}{z_a - z_i} \bar{\phi} + \frac{e_{31}}{\tilde{\epsilon}_{33}} z_m w_{,11} (x_3 - z_i) - \frac{1}{2} \frac{e_{31}}{\tilde{\epsilon}_{33}} w_{,11} (x_3^2 - z_i^2) , \quad (4.25)$$

und für das elektrische Feld gilt

$$\tilde{E}_3 = - \frac{1}{z_a - z_i} \bar{\phi} - \frac{e_{31}}{\tilde{\epsilon}_{33}} z_m w_{,11} + \frac{e_{31}}{\tilde{\epsilon}_{33}} w_{,11} x_3 . \quad (4.26)$$

Die Funktionsverläufe sind qualitativ in Bild 4.7b dargestellt.

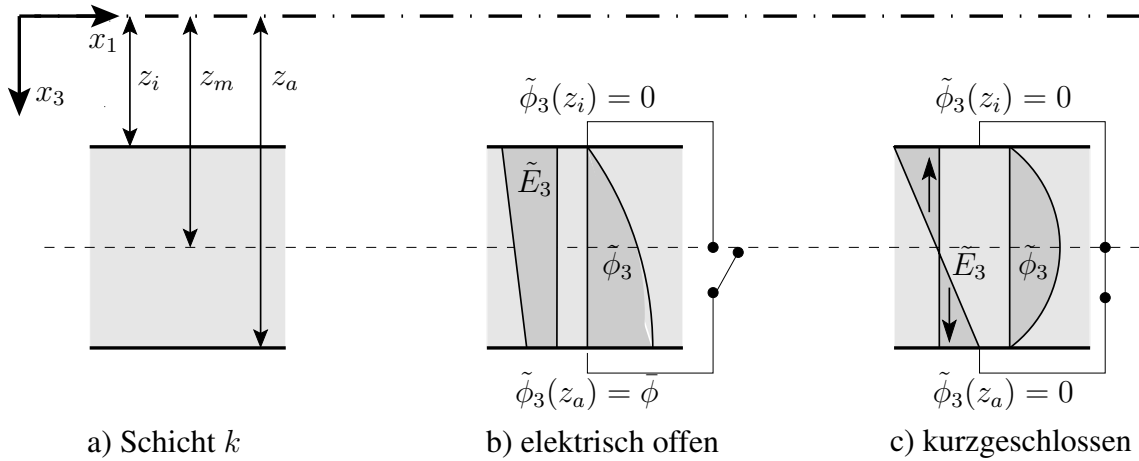


Bild 4.7: Quadratische Ansatzfunktionen für das elektrische Potential

Die Integration der Ansatzfunktionen führt wiederum auf das Gleichungssystem (4.21). Lediglich die Terme  $A^*$  enthalten zusätzliche Anteile,

$$A^* = 2b C_1 \frac{1}{3} z_i^3 + 2b \left( C_2 + \frac{e_{31}^2}{\tilde{\epsilon}_{33}} \right) \frac{1}{3} (z_a^3 - z_i^3) , \quad (4.27)$$

womit jetzt eine vollständige elektro-mechanische Kopplung vorliegt. Wie aus Bild 4.7c ersichtlich, existiert ein elektrisches Feld auch in dem Fall, dass das System elektrisch kurzgeschlossen ist. Das System wird insgesamt steifer, wobei der Zugewinn an Steifigkeit ausschließlich von den elektrischen Materialkennwerten  $e_{31}$  und  $\tilde{\epsilon}_{33}$  abhängt, die Abmessungen der piezoelektrischen Schicht haben keinen Einfluss.

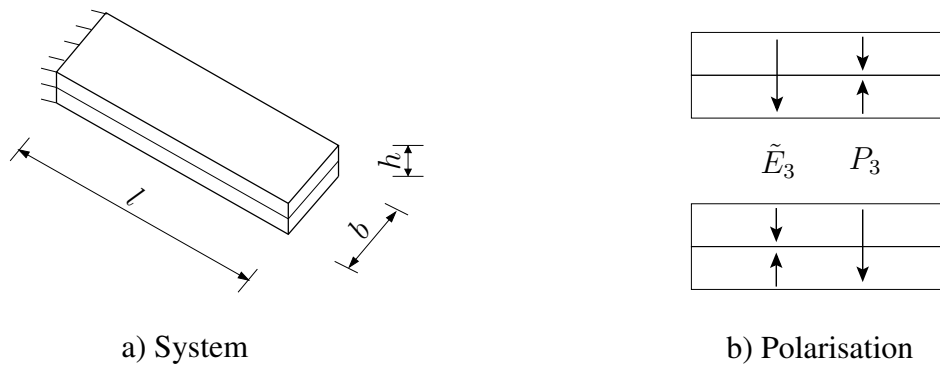
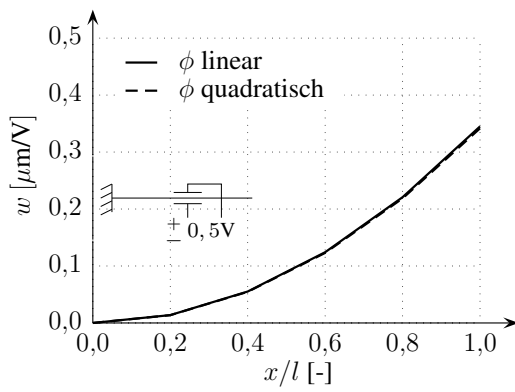


Bild 4.8: Testbeispiel Bimorph

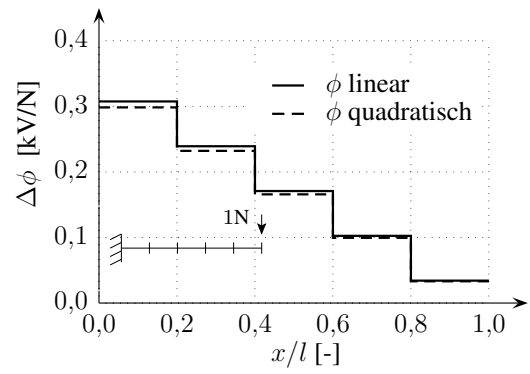
Als Vergleichsbeispiel dient der in Bild 4.8 abgebildete Bimorph, der in der Literatur u. a. in *Sze et al.* [87], *Mesecke* [71] oder *Piefort* [83] zu finden ist. Der Biegewandler besteht aus zwei PVDF-Schichten, deren Materialkennwerte Tabelle 3.2 zu entnehmen sind. Die Systemabmessungen betragen  $l/b/h = 100/5/2 \times 0,5$  mm. Biegung tritt auf, wenn entgegengesetzt polarisierte Schichten durch ein gleichgerichtetes elektrisches Feld beansprucht werden oder wenn in gleicher Richtung polarisierte Schichten mit einem jeweils entgegengesetzten elektrischen Feld beansprucht werden.

Bild 4.9a zeigt die Biegelinie des als Aktuator genutzten Biegewandlers, der mit einer Einheitspotentialdifferenz von  $\bar{\phi}_3 = 1$  V statisch beansprucht ist. Es ist zu erkennen, dass der quadratische Anteil der Ansatzfunktion für das elektrische Potential kaum Einfluss auf die Biegelinie hat. Die maximale Abweichung ist bei dem verwendeten Material PVDF kleiner 1% und damit vernachlässigbar. Entsprechend klein ist der Einfluss auch bei dem als Sensor genutzten Biegewandler. In Bild 4.9b ist das elektrische Potential infolge einer Einheitslast von  $P = 1$  N am Balkenende des mit fünf Elementen diskretisierten Balkens dargestellt.

Bild 4.10 enthält die Ergebnisse für den gleichen Test mit veränderten Materialparametern. Bei Verwendung von PZT-5a anstelle von PVDF ist der Einfluss des quadratischen Anteils der Ansatzfunktion für das elektrische Potential sehr viel deutlicher zu erkennen, liegt aber immer noch im Bereich kleiner 2%. Nachfolgend wird daher ein linearer Ansatz in Dickenrichtung berücksichtigt. Bei der Verwendung von Materialien mit hohen Kopplungsfaktoren bei vergleichsweise niedrigen E-Moduli ist die Gültigkeit dieser Annahme erneut zu überprüfen.

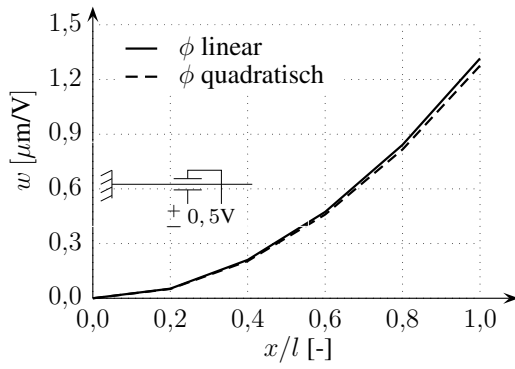


a) Biegelinie Aktuator

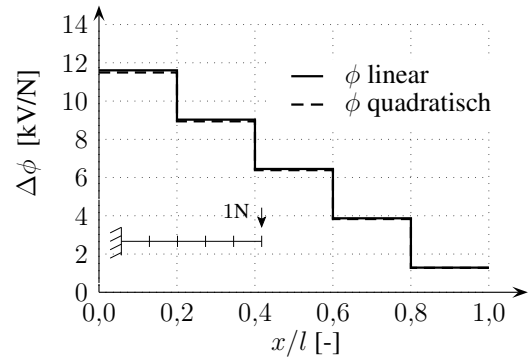


b) elektr. Potential Sensor

Bild 4.9: Material PVDF, Vergleich unterschiedlicher Ansatzordnungen für  $\tilde{\phi}_3$



a) Biegelinie Aktuator



b) elektr. Potential Sensor

Bild 4.10: Material PZT-5a, Vergleich unterschiedlicher Ansatzordnungen für  $\tilde{\phi}_3$

### 4.2.3 Plattenelement

In diesem Abschnitt erfolgt die Erweiterung des z. B. in *Ahrens und Dinkler* [2] vorgestellten 16er-Kirchhoff-Rechteckplattenelementes auf piezoelektrische Anwendungen. Das Element basiert auf der klassischen Laminattheorie (CLT), welche die Berechnung mehrschichtiger Plattenaufbauten ermöglicht. Der Theorie liegen folgende Annahmen zugrunde:

- Die Plattendicke  $h$  ist konstant und klein gegenüber den anderen Systemabmessungen, für jede Schicht gilt die Annahme eines ebenen Spannungszustandes.
- Der Querschnitt des verformten Systems bleibt eben, Schubverzerrungen infolge Querkraft sind vernachlässigbar (Kirchhoff-Hypothese).
- Zwischen den Einzelschichten besteht ein idealer Verbund, sodass die Dehnungen linear über den Querschnitt verlaufen, es gilt  

$$\varepsilon_{11}(x_3) = -\kappa_{11} x_3, \quad \varepsilon_{22}(x_3) = -\kappa_{22} x_3, \quad \varepsilon_{12}(x_3) = -\kappa_{12} x_3.$$
- Das System verhält sich geometrisch und physikalisch linear.

Die Plattenmittelfläche liegt in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene, die Vorzeichen und der Laminataufbau sind mit Bild 4.11 festgelegt. Das Laminat besteht aus rein mechanischen Trägerschichten sowie piezoelektrischen Schichten. Das Plattenelement berücksichtigt ausschließlich Biegung, ist also auf symmetrische Laminataufbauten beschränkt. Die piezoelektrischen Schichten sind in  $x_3$ -Richtung polarisiert und somit transversal isotrop mit der Isotropieebene  $x_1$ - $x_2$ . Für die Trägerschichten können sowohl isotrope Materialien, wie z.B. Stahl, als auch transversalisotrope Materialien, wie z.B. faserverstärkte Kunststoffe, eingesetzt werden, die eine Vorzugsrichtung in der Tragwerksebene besitzen.

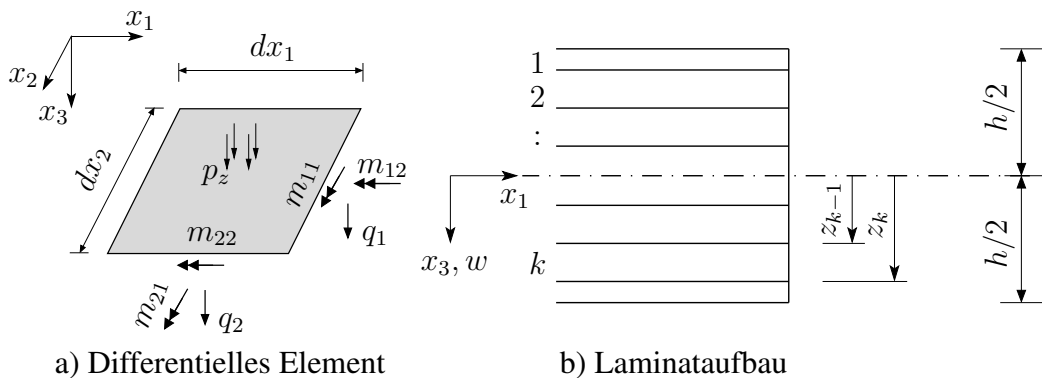


Bild 4.11: Piezoelektrisches Kirchhoff-Plattenelement

Unbekannte der Weggrößenformulierung sind die Biegefläche  $w(x_1, x_2)$  und das elektrische Potential  $\tilde{\phi}(x_3)$ . Kinematik und Differentialoperatoren sind festgelegt über

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_w & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \phi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \\ \tilde{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{11} & 0 \\ \partial_{22} & 0 \\ \partial_{12} & 0 \\ 0 & -\partial_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \tilde{\phi}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Die Materialgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{bmatrix} &= \sum_k \frac{1}{3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \begin{bmatrix} C_{1111}^* & C_{1122}^* & 0 \\ C_{1122}^* & C_{2222}^* & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{k_p} \frac{1}{2} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \begin{bmatrix} -e_{311}^* \\ -e_{311}^* \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_3 \end{bmatrix}, \quad (4.29) \\ \begin{bmatrix} \tilde{D}_3 \end{bmatrix} &= \sum_k \frac{1}{2} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \begin{bmatrix} -e_{311}^* & -e_{311}^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{k_p} (z_k - z_{k-1}) \begin{bmatrix} \tilde{\epsilon}_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

wobei die elektrischen Anteile auch nur in den piezoelektrischen Schichten auftreten. Die Arbeitsgleichungen folgen nach Einsetzen der Kinematik (4.28) und der Materialgleichungen (4.29) in Gleichung (4.5) zu

$$\begin{aligned} -\delta A_u &= \sum_k \int_A \frac{1}{3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) (\delta w_{,11} C_{1111}^* w_{,11} + \delta w_{,11} C_{1122}^* w_{,22} + \delta w_{,22} C_{2211}^* w_{,11} + \\ &\quad \delta w_{,22} C_{2222}^* w_{,22} + \delta w_{,12} C_{1212}^* w_{,12} + \delta w_{,21} C_{1212}^* w_{,21}) dA \\ &+ \sum_{k_p} \int_A \frac{1}{2} (z_k^2 - z_{k-1}^2) (\delta w_{,11} e_{311}^* \tilde{\phi}_{,3} + \delta w_{,22} e_{311}^* \tilde{\phi}_{,3}) dA + \int_A \delta w p dA \\ -\delta A_{\tilde{\phi}} &= \sum_k \int_A \frac{1}{2} (z_k^2 - z_{k-1}^2) (\delta \tilde{\phi}_{,3} e_{311}^* w_{,11} + \delta \tilde{\phi}_{,3} e_{311}^* w_{,22}) dA \\ &+ \sum_{k_p} \int_A (z_k - z_{k-1}) \delta \tilde{\phi}_{,3} \tilde{\epsilon}_{33}^* \tilde{\phi}_{,3} dA + \int_A \delta \tilde{\phi} q dA. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Der gewählte Hermite-Polynome-Produktansatz erfüllt die geforderte  $C_1$ -Konformität. In den vier Eckknoten des Rechteckelementes stehen die Knotenweggrößen  $\mathbf{w} = [w \ w_{,1} \ w_{,2} \ w_{,12}]$  als Unbekannte zur Verfügung. Eine lineare Ansatzfunktion nähert das elektrische Potential in  $x_3$ -Richtung an, Freiwert ist die elektrische

Potentialdifferenz  $\tilde{\phi}$ . Im Element treten demnach 16 mechanische Freiheitsgrade und ein elektrischer Freiheitsgrad für jede piezoelektrische Schicht bzw. bei symmetrisch aufgebauten Laminaten für jede Zwillingschicht auf.

Besteht der Schichtenverbund aus Faser-Verbund-Kunststoffen, ist eine zusätzliche Koordinatentransformation durchzuführen. Die Beschreibung des Materials erfolgt in dem, um den Winkel  $\theta$  verdrehten, lokalen Koordinatensystem, siehe Bild 4.12. In einer unidirektionalen Schicht sind alle Fasern parallel zur  $\bar{x}_1$ -Achse ausgerichtet, in der  $\bar{x}_2$ - $\bar{x}_3$ -Ebene ist die Schicht isotrop.

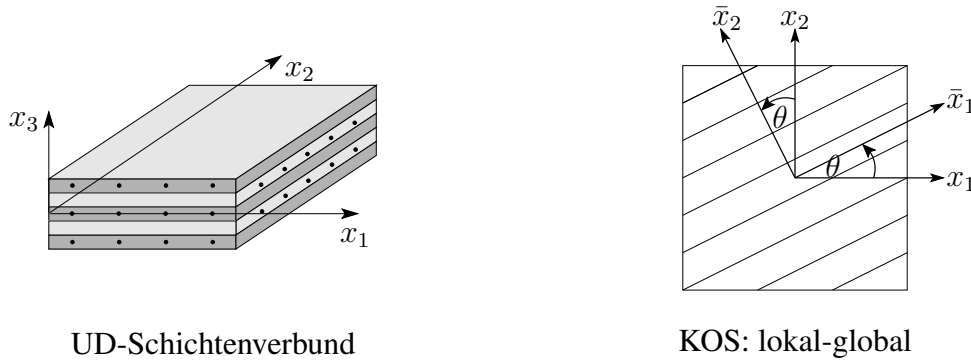


Bild 4.12: Laminat aus Faserverbundwerkstoff

Die Materialgleichungen für eine UD-Schicht lauten unter Berücksichtigung eines ebenen Spannungszustandes

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} - \frac{C_{1122}C_{1122}}{C_{2222}} & C_{1122} - \frac{C_{1122}C_{2233}}{C_{2222}} & 0 \\ C_{1122} - \frac{C_{1122}C_{2233}}{C_{2222}} & C_{2222} - \frac{C_{2233}C_{2233}}{C_{2222}} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

mit  $\Delta = (1 + \nu_{23})(1 - \nu_{23} - 2\nu_{21}\nu_{12})$  und

$$\begin{aligned} C_{1111} &= \frac{E_1 - \nu_{23}^2 E_1}{\Delta}, & C_{1122} &= \frac{\nu_{12} E_2 + \nu_{12} \nu_{23} E_2}{\Delta}, \\ C_{2222} &= \frac{E_2 - \nu_{12}^2 E_1}{\Delta}, & C_{2233} &= \frac{\nu_{23} E_2 + \nu_{12}^2 E_1}{\Delta}, \\ C_{1212} &= G_{12}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Auf eine Integration der Spannungen über die Bauteildicke wird an dieser Stelle verzichtet. Mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin 2\theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (4.33)$$



erfolgt die Drehung der Elastizitätsmatrizen der unterschiedlich orientierten UD-Schichten in das globale  $x_1$ - $x_2$ -System,

$$\mathbf{C}_{gl} = \mathbf{T} \mathbf{C}_{lo} \mathbf{T}^T . \quad (4.34)$$

Die Überprüfung des Elementes erfolgt anhand des von *Batra und Liang* [7] vorgestellten Beispiels, bei dem die Eigenfrequenzen einer Faserverbundplatte mit verschiedenen Ansätzen berechnet werden. Die Platte hat die Abmessungen  $l_x/l_y = 0,3\sqrt{2}/0,3$  m und ist allseitig gelenkig gelagert. Sie besteht aus einem 10-schichtigen Kreuzverbund  $[0/90/0/90/0]_s$ . Jede Einzelschicht besteht aus 0,4 mm Graphit-Epoxid. Auf Ober- und Unterseite ist jeweils eine 0,02 mm dicke Schicht PZT-G1195 geklebt, die Materialparameter sind in Tabelle 3.2 gegeben. In Bild 4.13 sind die ersten 6 Eigenmoden dargestellt, die zugehörigen Eigenfrequenzen sind in Tabelle 4.3 enthalten. Die nach der CLT berechneten Eigenfrequenzen liegen zwischen der von *Benjeddou et al.* [9] ermittelten analytischen 2D-Plattenlösung und der von *Batra und Liang* angegebenen 3D-Lösung.

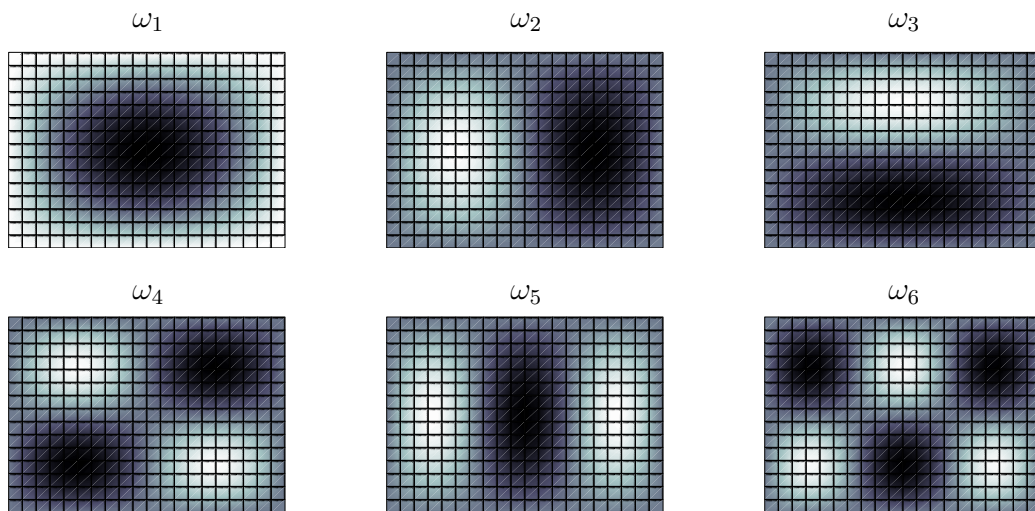


Bild 4.13: Plattenmoden

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
3D nach <i>Batra</i>	988,8	2.266,5	3.129,2	3.934,8	4.642,8	5.863,6
2D nach CLT	1.018,3	2.313,6	3.246,6	4.073,1	4.744,9	6.053,2
2D nach <i>Benjeddou</i>	1.035,1	2.344,3	3.287,3	4.125,6	4.785,3	6.134,7

Tabelle 4.3: Vergleich der ersten 6 Eigenkreisfrequenzen [rad/s]

### 4.3 Makro-Scheibenelement

Alle bisher vorgestellten Elemente haben gemeinsam, dass die piezoelektrischen Eigenschaften gleichmäßig über die Elementgeometrie verteilt sind. Für die Berechnung kombinierter Systeme, die sowohl rein mechanische als auch piezoelektrische Materialien enthalten, ist es erforderlich, die unterschiedlichen Bereiche getrennt voneinander räumlich zu diskretisieren. Diese räumliche Diskretisierung der piezoelektrischen Elemente erfordert einen unverhältnismäßig hohen numerischen Aufwand, wenn das betrachtete Tragwerk groß im Vergleich zu den piezoelektrischen Aktuatoren und Sensoren ist, siehe Bild 3.9 und Bild 4.14a/b. Bei dem hier vorgestellten Makroelement werden die elektro-mechanischen Gleichungen für rotationssymmetrische Fälle analytisch gelöst. Die hieraus auf Elementebene folgenden Knotenkräfte werden den entsprechenden Knotenweggrößen zugeordnet, siehe Bild 4.14c. Das Makro-Scheibenelement basiert auf einem isoparametrischen 8-Knoten Scheibenelement mit quadratischen Ansätzen für die Verschiebungsfelder. Zwischen den integrierten Piezos und dem umgebenden Material wird ein idealer Verbund vorausgesetzt und die Klebeschicht wird vernachlässigt.

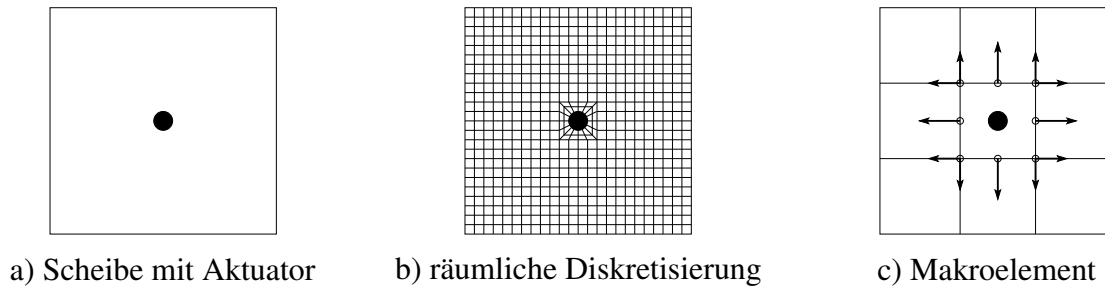


Bild 4.14: Modellierung piezokeramischer Aktuatoren

Ausgehend von den Arbeitsgleichungen (4.6) folgen die Steifigkeitsmatrix  $K_{uu}$  und die Massenmatrix  $M_{uu}$  unter Annahme homogenen Materialverhaltens nach Integration über das gesamte Elementgebiet. Für die Bestimmung der Permittivitätsmatrix  $K_{\phi\phi}$  muss über die Fläche des im Element enthaltenen Aktuators integriert zu werden. Die Kopplungsmatrizen  $K_{\phi u}$  und  $K_{u\phi}$  des Makroelementes werden wie folgt mit Hilfe des Kraftgrößenverfahrens aufgestellt.

Ein rotationssymmetrischer piezoelektrischer Aktuator kann als Kreisscheibe in einem unendlichen Halbraum idealisiert werden, wenn der Aktuator klein im Vergleich zur umgebenden Struktur ist und das Bauteil harmonisch in Scheibenebene anregt. Unter diesen Voraussetzungen existieren analytische Lösungen für Spannungen und Dehnungen in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz  $\Omega$ .

Der Lastspannungszustand (LSZ) in Bild 4.15a beschreibt die frequenzabhängige Randverschiebung  $u_0(\Omega)$  der spannungsfrei gelagerten piezoelektrischen Kreisscheibe infolge einer elektrischen Einheitspotentialdifferenz  $\bar{\phi}_3 = 1$  V. Der Einheitsspannungszustand (ESZ) beschreibt die frequenzabhängigen Verschiebungen  $u_1(\Omega)$  und  $u_2(\Omega)$  an den Rändern des Aktuators und des unendlichen Halbraumes infolge eines auf die Schnittflächen wirkenden Einheitsdruckes  $p = 1$ , siehe Bild 4.15b/c.

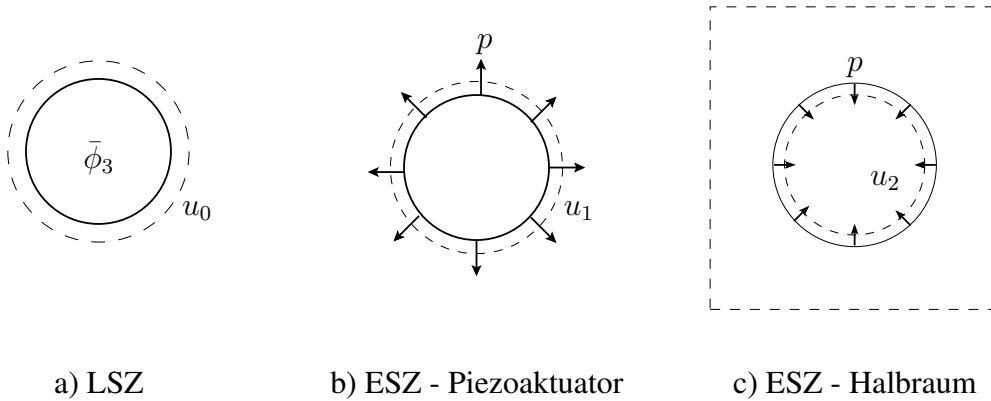


Bild 4.15: Rotationssymmetrischer Last- und Einheitsspannungszustände

Mit der Verformungsbedingung

$$u_0(\Omega) + [u_1(\Omega) + u_2(\Omega)] X(\Omega) = 0 \quad (4.35)$$

wird der frequenzabhängige Ersatzdruck  $X(\Omega)$  berechnet. Dieser ist äquivalent zu der Beanspruchung, die ein piezoelektrischer Aktuator auf den umgebenden Halbraum ausübt, wenn er mit der Frequenz  $\Omega$  und der elektrischen Potentialdifferenz von 1 V angeregt wird. Hiermit sind das Verschiebungsfeld und das Spannungsfeld des elastischen Halbraums mit der elektrischen Potentialdifferenz des Aktuators verknüpft. Die Berechnung von Last- und Einheitsspannungszustand erfolgt mit den analytischen Lösungen für Kreis- und Kreisringscheiben, die in den zwei folgenden Abschnitten kurz zusammengefasst sind. Ein umfassender Überblick über das Schwingungsverhalten kreisförmiger Scheiben ist in *Zimmermann* [97] und *Imer* [49] enthalten. *Lin* [61] untersucht das dynamische Verhalten einer rotationssymmetrischen, piezokeramischen Scheibe, die in einen Metallring eingefasst ist, und gibt eine analytische Lösung für den Cymbaltransmitter an.

### 4.3.1 Lastspannungszustand

Die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten beschreiben die Schwingungen isotroper Kreis- und Kreisringscheiben. Unter rotationssymmetrischer Belastung verschwinden die Ableitungen in tangentialer Richtung und die Bewegungsgleichungen

reduzieren sich auf die Differentialgleichungen

$$u_{r,rr} + \frac{1}{r}u_{r,r} - \frac{1}{r^2}u_r = \frac{\rho}{D}\ddot{u}_r , \quad (4.36)$$

$$u_{\varphi,rr} + \frac{1}{r}u_{\varphi,r} - \frac{1}{r^2}u_{\varphi} = \frac{\rho}{G}\ddot{u}_{\varphi} , \quad (4.37)$$

mit der Dehnsteifigkeit  $D = E/(1 - \nu^2)$  und dem Schubmodul  $G = E/(2 + 2\nu)$ . Gleichung (4.37) wird im Folgenden nicht weiter betrachtet, da die radialen Verschiebungen zur Berechnung der Einheits- und Lastspannungszustände genügen. Für den eingeschwungenen Zustand spaltet der Separationsansatz

$$u_r(r, t) = u_r(r) \cdot \cos(\Omega t) \quad (4.38)$$

den Verschiebungsvektor in einen räumlichen und einen zeitlichen Anteil auf, womit die Zeitkoordinate eliminiert werden kann und die Lösung der Bewegungsgleichung ausschließlich von der Erregerfrequenz  $\Omega$  abhängt,

$$u_{r,rr} + \frac{1}{r}u_{r,r} - \frac{1}{r^2}u_r = -\frac{\rho}{D}\Omega^2 u_r . \quad (4.39)$$

Mit der Dehnwellenzahl  $k_D = \Omega\sqrt{\frac{\rho}{D}}$  und der bezogenen Variablen  $\tilde{r} = k_D r$  folgt die Besselsche Differentialgleichung

$$u_{r,\tilde{r}\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}}u_{r,\tilde{r}} + (1 - \frac{1}{\tilde{r}^2})u_r = 0 . \quad (4.40)$$

Deren Lösung

$$u_r(r) = C_1 J_1(\tilde{r}) + C_2 N_1(\tilde{r}) \quad (4.41)$$

ist eine Kombination aus Besselfunktion  $J_1(\tilde{r})$  und Neumannfunktion  $N_1(\tilde{r})$  erster Ordnung, die in Bild 4.16 dargestellt sind, und den Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$ . Die Besselfunktion erster Ordnung ähnelt einer abklingenden Sinusfunktion, die Neumannfunktion erster Ordnung einer abklingenden Cosinusfunktion, die jedoch in  $\tilde{r} = 0$  eine Polstelle besitzt.

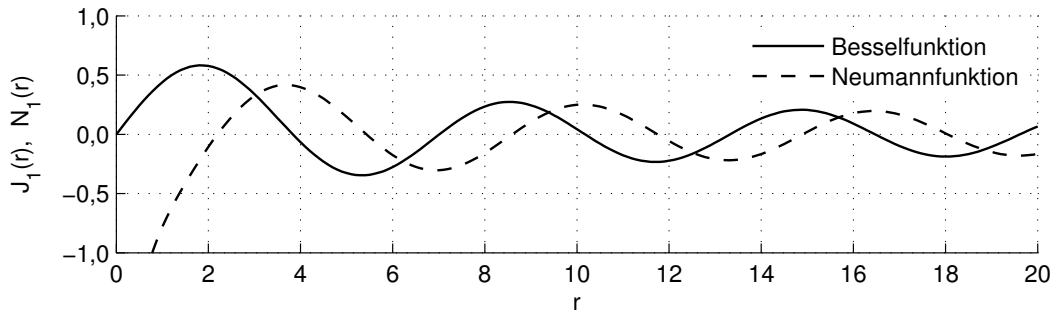


Bild 4.16: Bessel- und Neumannfunktion erster Ordnung

Mit den Gleichungen der Kinematik in Polarkoordinaten für rotationssymmetrische Einwirkungen

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r} , \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} u_r , \quad \varepsilon_{r\varphi} = 0 \quad (4.42)$$

und dem Hookeschen Gesetz

$$\sigma_{rr} = D (\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\varphi\varphi}) , \quad \sigma_{\varphi\varphi} = D (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu \varepsilon_{rr}) , \quad \sigma_{r\varphi} = 0 \quad (4.43)$$

können die Spannungen durch die allgemeine Lösung für die Verschiebungen beschrieben werden,

$$\sigma_{rr}(r) = -C_1 L_1^J(\tilde{r}) - C_2 L_1^N(\tilde{r}) . \quad (4.44)$$

Alle Terme, die bei der Ableitung von Bessel- und Neumannfunktionen entstehen, sind in

$$\begin{aligned} L_1^J(\tilde{r}) &= D k_D (1 - \nu) \frac{1}{\tilde{r}} J_1(\tilde{r}) - D k_D J_0(\tilde{r}) \\ L_1^N(\tilde{r}) &= D k_D (1 - \nu) \frac{1}{\tilde{r}} N_1(\tilde{r}) - D k_D N_0(\tilde{r}) \end{aligned} \quad (4.45)$$

zusammengefasst. Nach Anpassung der Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  an die Verschiebungsrandbedingungen  $u_r = \bar{u}(\Omega)$  auf  $\Gamma_u$  und die Spannungsrandbedingungen  $\sigma = \bar{\sigma}(\Omega)$  auf  $\Gamma_\sigma$  ist das Verschiebungsfeld in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz  $\Omega$  bekannt.

Der Lastspannungszustand beschreibt die radiale Schwingung der außen spannungsfrei gelagerten piezoelektrischen Kreisscheibe,  $\sigma_{rr}(R) = 0$ , die durch eine elektrische Einheitspotentialdifferenz von 1 V in Dickenrichtung angeregt wird. Für die geschlossene Kreisscheibe gilt  $u_r(0) = 0$ . Um eine Singularität wegen  $N_1(r \rightarrow 0) = -\infty$  zu vermeiden, muss  $C_2 = 0$  gelten. Mit den erweiterten Materialgleichungen in Polarkoordinaten unter Annahme isotropen Materialverhaltens

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= D [\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\varphi\varphi}] - (1 - \nu)^{-1} e_{31} \tilde{E}_3 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= D [\nu \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}] - (1 - \nu)^{-1} e_{31} \tilde{E}_3 \\ \tilde{D}_3 &= e_{31} [\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}] + \tilde{\epsilon}_{33} \tilde{E}_3 \end{aligned} \quad (4.46)$$

folgt die Spannungsrandbedingung für den Transversalaktuator zu

$$\sigma_{rr}(R) = -C_1 L_1^J(\tilde{R}) - (1 - \nu)^{-1} e_{31} \tilde{E}_3 = 0 . \quad (4.47)$$

Bild 4.18 zeigt das Frequenzspektrum für den in Bild 4.17 dargestellten Aktuator. Der Vergleich mit der FE-Lösung verdeutlicht die Effizienzsteigerung, die unter Verwendung der analytischen Lösung möglich ist. Die FE-Lösung konvergiert nur für große Elementzahlen gegen die analytische Lösung, siehe Bild 4.18. Das Frequenzspektrum zeigt die Randverschiebung des harmonisch angeregten Aktuators. Das FE-Netz des Aktuators besteht im linken Bild aus 48 und im rechten Bild aus 192 piezoelektrischen 9-Knoten-Scheibenelementen.

#### Scheibenaktuator aus PIC255

$$R = 12,5 \text{ mm}$$

$$t = 0,5 \text{ mm}$$

Materialkennwerte nach Tabelle 3.2

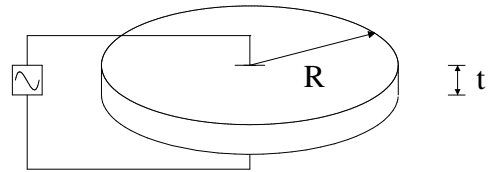


Bild 4.17: Piezokeramischer Scheibenaktuator aus PIC255 von *PI Ceramic*

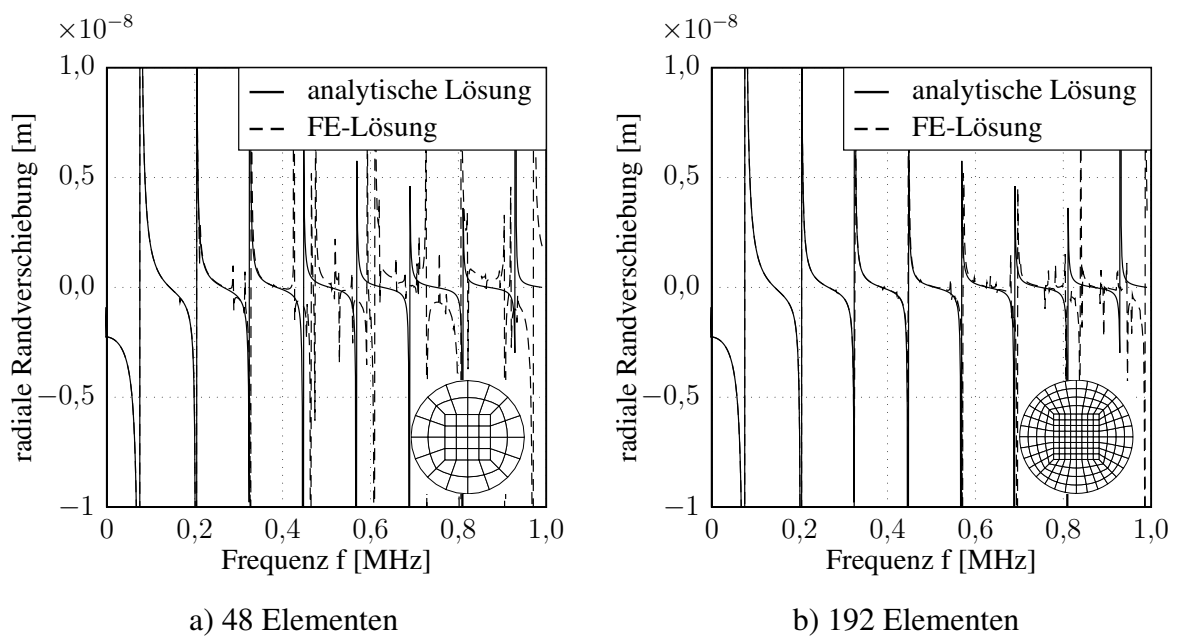


Bild 4.18: Lastspannungszustand, Vergleich von analytischer und FE-Lösung

### 4.3.2 Einheitsspannungszustand

Der Einheitsspannungszustand beschreibt die Randverschiebung des Aktuators und des Halbraums infolge eines auf die Schnittfläche wirkenden Einheitsdruckes. Für die innere Kreisscheibe gilt die in Gleichung (4.41) angegebene Lösung. Der das piezoelektrische Element umgebende Halbraum wird als unendlich ausgedehnte, gelochte Scheibe idealisiert. Wellen, die vom Loch ausgehend durch die Scheibe laufen, erfassen mit zunehmendem Radius eine immer größere Fläche und erfahren somit eine Abschwächung, die als geometrische Dämpfung interpretiert werden kann. Der eingeschwungene Zustand infolge harmonischer Anregung kann sich hier nicht einstellen, wenn die unendlich weit entfernten Ränder die Wellen nicht reflektieren. Um die geometrischen Randbedingungen zu erfüllen, ist es sinnvoll, den exponentiellen

Zeitverlauf

$$T(t) = e^{i\Omega t} \quad (4.48)$$

und die alternative Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$u(r) = C_1 H_n^{(1)}(\tilde{r}) + C_2 H_n^{(2)}(\tilde{r}) , \quad (4.49)$$

mit den Hankelschen Funktionen

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(\tilde{r}) &= J_n(\tilde{r}) + iN_n(\tilde{r}) , \\ H_n^{(2)}(\tilde{r}) &= J_n(\tilde{r}) - iN_n(\tilde{r}) \end{aligned} \quad (4.50)$$

anzusetzen. Im Gegensatz zu Gleichung (4.41) enthält die Gesamtlösung jetzt Terme der Art  $e^{i\Omega t} H_n^{(1)}(\tilde{r})$  und  $e^{i\Omega t} H_n^{(2)}(\tilde{r})$ . Für große Werte von  $r$  gilt

$$\begin{aligned} e^{i\Omega t} H_n^{(1)}(\tilde{r}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{r}}} \left[ \cos\left(\tilde{r} - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \Omega t\right) + i \sin\left(\tilde{r} - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \Omega t\right) \right] , \\ e^{i\Omega t} H_n^{(2)}(\tilde{r}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\tilde{r}}} \left[ \cos\left(\tilde{r} - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \Omega t\right) + i \sin\left(\tilde{r} - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \Omega t\right) \right] . \end{aligned} \quad (4.51)$$

Terme der zweiten Art beschreiben die vom Zentrum fortlaufende und abklingende Welle, siehe Bild 4.19, während Terme der ersten Art die von den Rändern reflektierte Welle beschreiben und daher aus der Gesamtlösung gestrichen werden können. Es folgt

$$u_r(r) = C_1 H_n^{(2)}(\tilde{r}) \quad (4.52)$$

$$\sigma_{rr}(r) = -C_1 D k_D \left[ \frac{1-\nu}{\tilde{r}} H_1^{(2)}(\tilde{r}) - H_2^{(2)}(\tilde{r}) \right] . \quad (4.53)$$

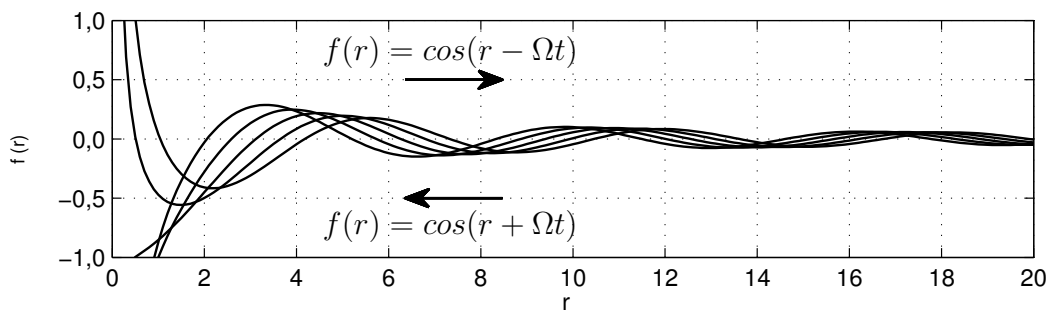


Bild 4.19: Vor- und zurücklaufende Welle

Die Lösung ist nun komplex. Resonanz tritt nicht auf, da der eingeschwungene Zustand nicht eintreten kann. In Bild 4.20 sind die frequenzabhängigen Randverschiebungen des Einheitsspannungszustands für die innere Kreisscheibe und die unendlich ausgedehnte Lochscheibe dargestellt. Der Radius der Schnittfläche beträgt 12,5 mm, das Material des Halbraums ist Stahl, mit  $E = 210 \cdot 10^3 \text{ MN/m}^2$  und  $\nu = 0,3$ .

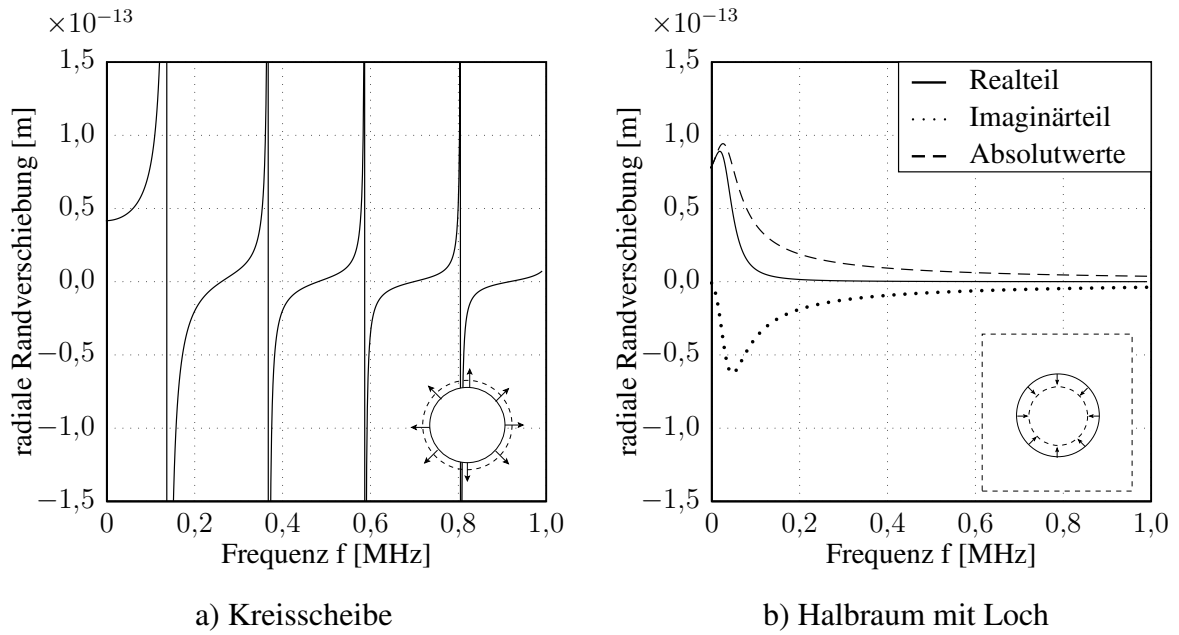


Bild 4.20: Einheitsspannungszustand

### 4.3.3 Elementsteifigkeitsmatrix aus elektro-mechanischer Kopplung

Der frequenzabhängige Ersatzdruck  $X(\Omega)$  folgt nach Einsetzen der Verschiebungen infolge Last- und Einheitsspannungszustandes in die Verformungsbedingung (4.35). Hiermit sind das Verschiebungs- und das Spannungsfeld für den gesamten elastischen Halbraum bekannt. Nach Projektion der Geometrie des Makroelementes auf den Halbraum um den Aktuator können die radialen Spannungen  $\sigma_{rr}(\Gamma, \Omega)$ , die tangentialen Spannungen  $\sigma_{\varphi\varphi}(\Gamma, \Omega)$  sowie die radialen Verschiebungen  $u_r(\Gamma, \Omega)$  entlang des Elementrandes berechnet werden, siehe Bild 4.21a.

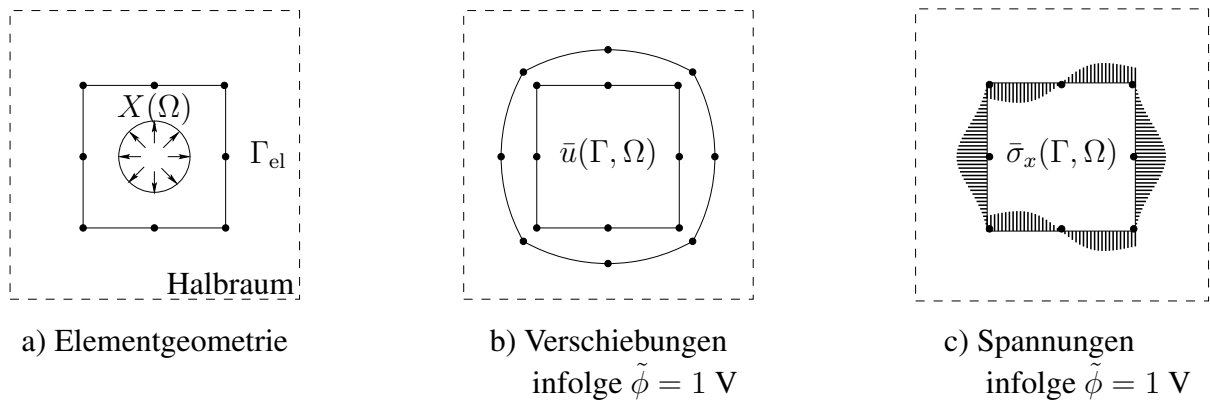


Bild 4.21: Elementgeometrie, projiziert auf den Halbraum

Die resultierenden Knotenkräfte des Makroelementes enthalten zwei Anteile. Den ersten Anteil erhält man, wenn die Verschiebungen  $\bar{u}(\Gamma, \Omega)$  der Halbraumlösung ent-



lang des Elementrandes mit anderem Vorzeichen in das Makroelement eingepägt werden, siehe Bild 4.21b. Mit dem Verschiebungsvektor  $\bar{\mathbf{u}}(\Omega)$  der Knotenverschiebungen in globalen Koordinaten und der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{uu}$  nach Gleichung (4.9) gilt

$$\mathbf{f}_u(\Omega) = \mathbf{K}_{uu} \bar{\mathbf{u}}(\Omega) . \quad (4.54)$$

Der zweite Anteil beschreibt das Integral der Spannungen  $\bar{\sigma}(\Gamma, \Omega)$  über den Elementrand. Die Spannungen werden nach Transformation in kartesische Koordinaten numerisch an fünf Stützstellen über den Rand integriert,

$$\mathbf{f}_\sigma(\Omega) = \int_{\Gamma_{el}} \bar{\sigma}(\Gamma, \Omega) d\Gamma_{el} . \quad (4.55)$$

Mit den Knotenkräften infolge Einheitsanregung erhält man direkt die frequenzabhängige Kopplungsmatrix

$$\mathbf{K}_{u\phi}(\Omega) = \mathbf{f}_u(\Omega) + \mathbf{f}_\sigma(\Omega) , \quad (4.56)$$

die das Verschiebungsfeld des Makro-Scheibenelementes mit der elektrischen Potentialdifferenz am Aktuator auf Elementebene koppelt. Während die mechanische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{uu}$  für das gesamte Gebiet des Makroelementes gilt, bezieht sich die Permittivitätsmatrix  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  nur auf die Fläche des integrierten Piezos. Eine detaillierte Diskretisierung der elektro-mechanischen Gleichungen im Bereich des Aktuators ist jetzt nicht mehr erforderlich. Der Aktuator kann an beliebiger Stelle innerhalb des Makroelementes positioniert werden, wodurch die Diskretisierung mit der FEM ausschließlich an die Erfordernisse des Bauteils angepasst werden kann.

### 4.3.4 Netzverdichtung

Die FEM ist ein Näherungsverfahren, dessen Lösung bei hoher Elementdichte in der Regel gegen die analytisch exakte Lösung konvergiert. Es bietet sich an, die Elementdichte in Bereichen großer Spannungs- und Verzerrungsgradienten zu erhöhen, um effizient gute Ergebnisse zu erhalten. Während eine lokale Netzverdichtung mit Dreieckselementen problemlos möglich ist, erfordert die Verwendung von Rechteckelementen besondere Maßnahmen.

Bei Verwendung des Makroelementes entstehen Schwierigkeiten, wenn das piezoelektrische Element groß im Vergleich zur umgebenden Struktur ist. Während innerhalb des Makroelementes die analytisch exakte Lösung vorliegt, begrenzt das grobe Elementnetz außerhalb des Makroelementes die Auflösung der FE-Berechnung in höheren Frequenzbereichen. Um die Effizienzsteigerung durch den Einsatz des Makroelementes dennoch nutzen zu können, kommt in dieser Arbeit das Konzept der

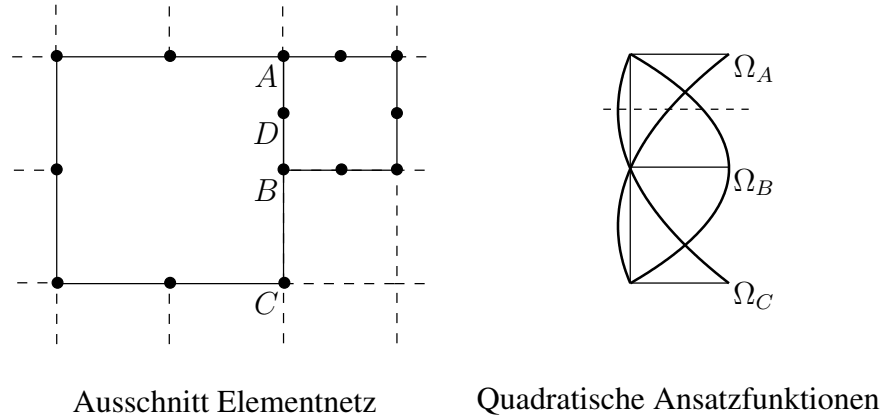


Bild 4.22: Netzverdichtung

„hängenden Knoten“ zum Einsatz, mit dem eine Netzverdichtung um das Makroelement herum möglich ist, siehe *Demkowicz* [21] oder *Wiedemann* [94].

Hierbei wird, wie in Bild 4.22 zu sehen, ein größeres Element über eine Seite mit zwei kleineren Elementen gekoppelt. Die Nebenbedingung

$$\delta\lambda(\mathbf{u}_D - \mu_A \mathbf{u}_A - \mu_B \mathbf{u}_B - \mu_C \mathbf{u}_C) = 0 \quad (4.57)$$

verknüpft die Freiwerte des „hängenden“ Seitenmittelknotens  $D$  des kleineren Elementes mit den Freiwerten der Seitenknoten  $A, B$  und  $C$  des Nachbarelementes. Die Koeffizienten  $\mu$  resultieren aus den am Knoten  $D$  ausgewerteten Ansatzfunktionen. Für gerade Elementränder und quadratische Ansatzfunktionen gilt:  $\mu_A = 3/8$ ,  $\mu_B = 3/4$ ,  $\mu_C = -1/8$ , wenn der Knoten  $D$  mittig zwischen  $A$  und  $B$  liegt. Der Lagrange-Multiplikator  $\lambda$  ist die zu  $\mathbf{u}$  konjugierte Größe und somit als Kraft interpretierbar, die in  $D$  wirkt und die gegenseitige Verschiebung der Elementränder verhindert.

### 4.3.5 Verifikationsbeispiele

Verifikation und qualitative Beurteilung der vorgestellten Formulierung erfolgen an verschiedenen Testbeispielen. Zunächst wird der Einfluss der Elementgeometrie auf die mit dem 8-Knoten-Makroelement erzielten Ergebnisse untersucht. Das anschließende Beispiel vergleicht die Antwortspektren für verschiedene Diskretisierungen.

#### Elementgeometrie

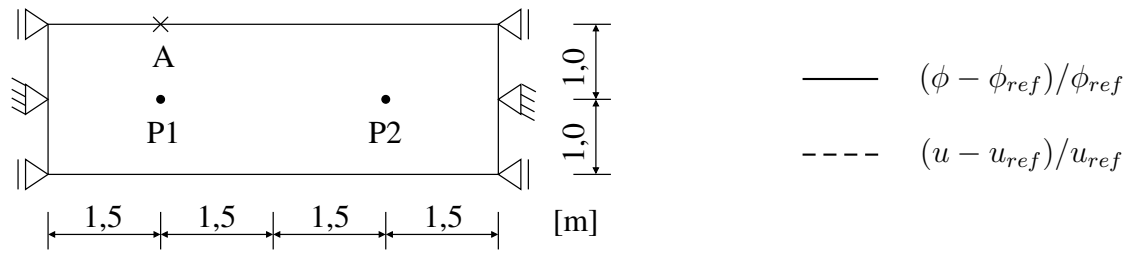
Der Einfluss der Elementgeometrie auf die Approximationsgüte wird an der in Bild 4.23 dargestellten Scheibe untersucht. Die Scheibe ist mit zwei 8-Knoten-Makroelementen diskretisiert. Eine elektrische Potentialdifferenz von  $\bar{\phi} = 1$  V beansprucht

den Aktuator P1 stationär in Dickenrichtung. Als Vergleichswerte dienen die vertikale Verschiebung in Punkt A sowie das im Sensor P2 gemessene elektrische Potential. Das Verhältnis  $r/d$  gilt als Maß für die Gestaltänderung. Alle Ergebnisse sind bezogen auf die Referenzlösung mit zwei gleichgroßen Rechteckelementen.

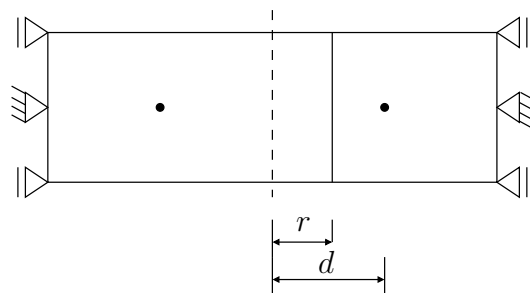
Im ersten Beispiel variiert die Elementgröße. Da die Position der integrierten piezoelektrischen Aktuatoren unverändert bleibt, wandert jeweils ein Aktuator dem Elementrand entgegen. Im zweiten Beispiel wird die Abweichung von der Rechteckform untersucht, im dritten Beispiel die Abweichung von der Polygonform. In allen drei Fällen zeigt sich das Elementverhalten im Bereich  $-0,5 < r/d < 0,5$  gutmütig. Außerhalb dieses Bereiches verschlechtert sich die Qualität der Berechnung stark. Eine ausmittige Anordnung der piezoelektrischen Aktuatoren ist also möglich, die Gestaltänderung sollte jedoch moderat ausfallen.

### **Berechnung von Frequenzspektren**

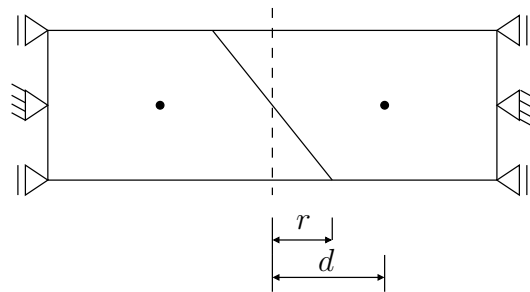
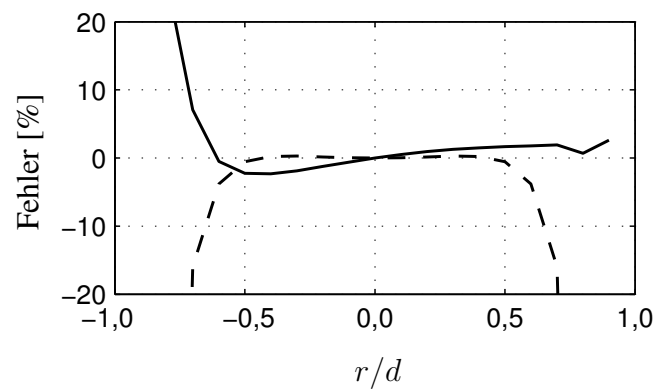
Die Effizienz des Makroelementes wird am Beispiel der Stahlscheibe in Bild 4.24a gezeigt. Die Scheibe mit den Abmessungen  $60 \times 180$  cm ist an der Ober- und Unterseite eingespannt. In den Punkten 1 und 2 sind piezokeramische Aktuatoren aus PIC255 mit einem Durchmesser von 2,5 cm in die Scheibe eingesetzt. Der obere Aktuator wird mit  $\tilde{\phi} = 1$  V dynamisch angeregt. Netz 1 ist als Referenzlösung definiert. Hier werden die elektro-mechanischen Gleichungen im Bereich des Aktuators mit 48 Elementen räumlich diskretisiert, während in den Netzen 2 und 3 das Makroelement verwendet wird. In Bild 4.24b ist der Realteil des Frequenzgangs der Verschiebung  $u_x$  in Punkt A dargestellt. Bis zu einer Frequenz von 8 kHz sind die Verschiebungen in allen Netzen nahezu identisch. Bei höheren Frequenzen ist Netz 2 zu grob, um die zugehörigen Schwingungsformen abbilden zu können. In Netz 3 ist das Netz um die Makroelemente mit Hilfe von „hängenden Knoten“ verfeinert, wodurch die Abweichungen von der Referenzlösung verkleinert werden. In Bild 4.24c ist der Realteil des Frequenzgangs des elektrischen Potentials, gemessen in Sensor P2, dargestellt. Für einzelne Frequenzen weicht hier die Amplitude stärker von der Referenzlösung ab, wenn der zu der Frequenz gehörende Eigenmode starke Verzerrungen im Bereich des Sensor-Makroelementes aufweist.



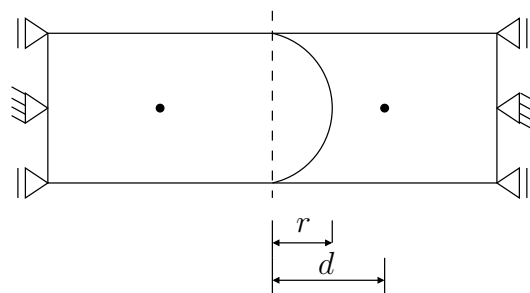
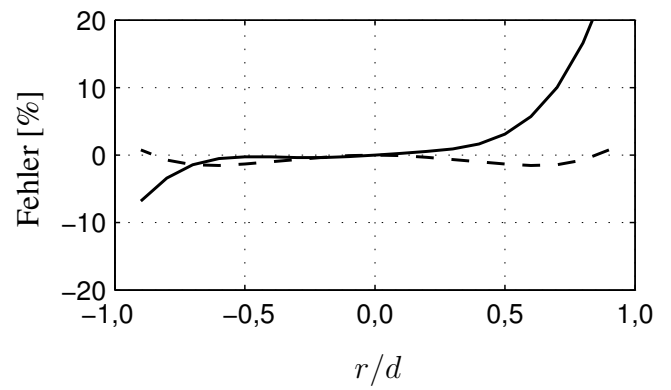
a) System und Materialkennwerte



b) Ausmittigkeit der Aktuatoren



c) Abweichung von der Rechteckform



d) Abweichung von der Polygonalform

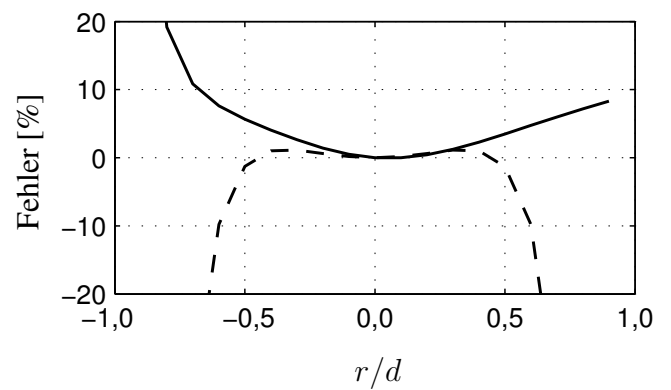
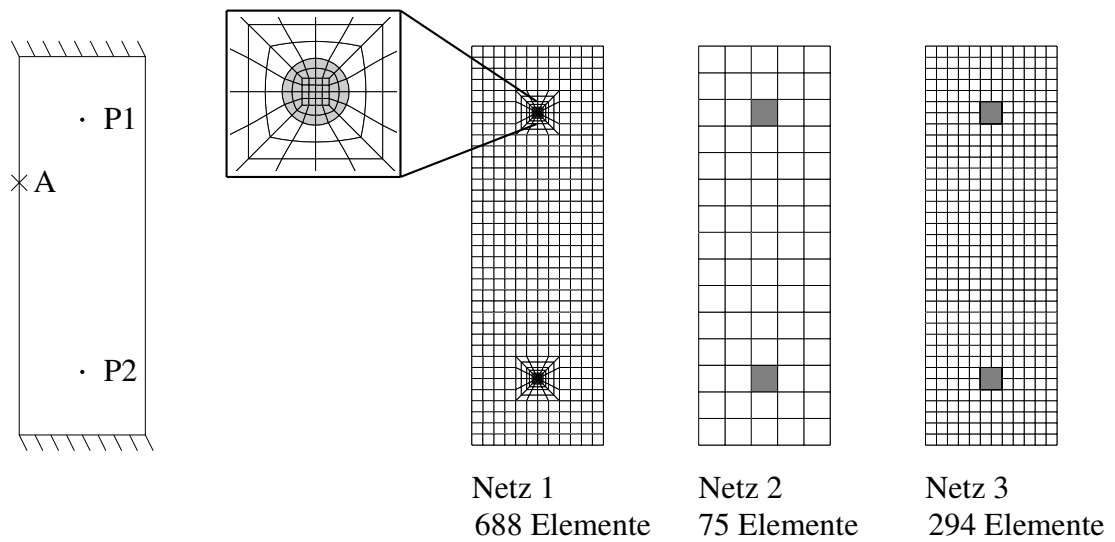
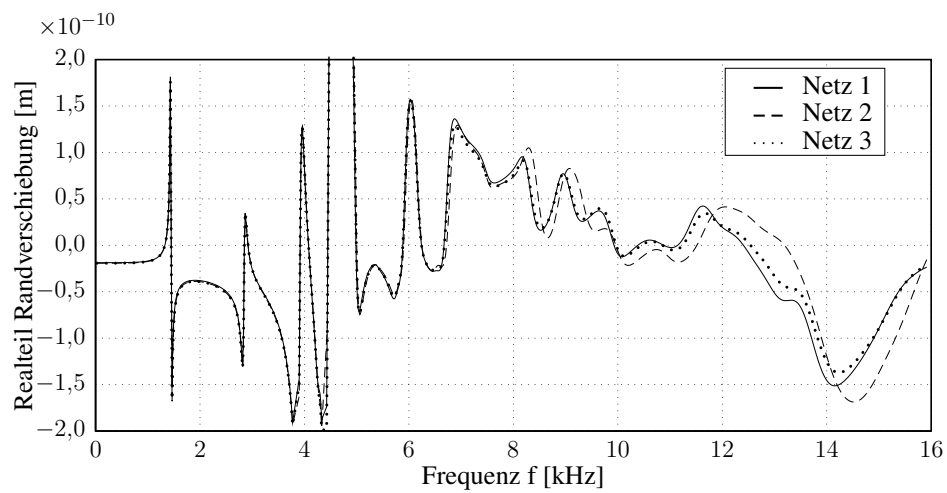


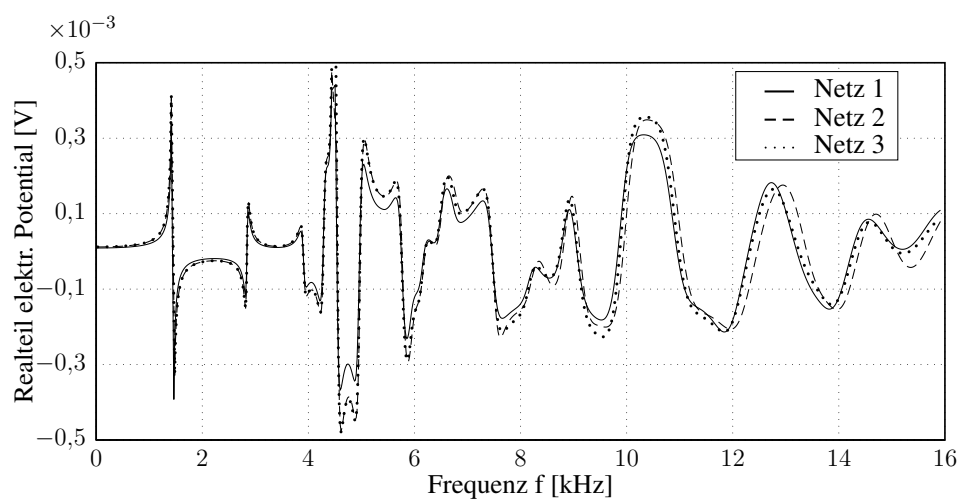
Bild 4.23: Einfluss der Elementgeometrie



a) Modell und Diskretisierung



b) Antwortspektrum, Randverschiebung  $u_x$  in Punkt A



c) Antwortspektrum, elektrisches Potential  $\tilde{\phi}$  in Sensor P2

Bild 4.24: Scheibe mit unterschiedlicher Diskretisierung



## 5. Systemidentifikation

Die Identifikation physikalischer Systemparameter erfolgt im Rahmen dieser Arbeit mit Hilfe der indirekten parametrischen Identifikation. Hierbei wird ein mathematisches Modell mit einem Parameterschätzverfahren an die experimentell ermittelten Größen angepasst. Als mathematisches Modell dient die mit der FEM diskretisierte Bewegungsgleichung im Frequenzbereich

$$(-\Omega^2 \mathbf{M} + i \Omega \mathbf{B} + \mathbf{K}) \mathbf{x} = \mathbf{S}(\Omega) \mathbf{x} = \mathbf{p} . \quad (5.1)$$

Die Bestimmung der Systemmatrizen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{K}$  bzw. der dynamischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}(\Omega)$  aus gemessenen Eingangsgrößen  $\mathbf{p}_m$  und gemessenen Ausgangsgrößen  $\mathbf{x}_m$  stellt ein inverses Problem dar.

### 5.1 Parameterschätzverfahren

Als Parameterschätzverfahren wird die Fehlerquadratmethode verwendet. Je nach Vorwissen über das reale Tragverhalten und die statistische Verteilung der experimentellen Daten kommen alternative Parameterschätzverfahren, wie die Maximum-Likelihood-Methode oder die Bayes-Schätzung, für die Korrektur zum Einsatz.

Die gemessenen Ein- und Ausgangsgrößen setzen sich stets aus dem wirklichen Signal und einem Störsignal zusammen. Während systematische Störsignale in der Regel nur vom Nutzer zu erkennen und zu entfernen sind, können zufällige Fehler, wie z. B. weißes Rauschen, mit den Methoden der Statistik beschrieben und ausgeglichen werden. Ziel der vorgestellten Parameterschätzverfahren ist, die gesuchten Modellparameter bestmöglich aus der Gesamtheit der fehlerbehafteten Versuchsdaten zu rekonstruieren. Für eine Beurteilung zufälliger Fehler sind die Daten aus mehreren unabhängigen Versuchen nötig.

Ausgangspunkt aller Parameterschätzverfahren ist die Definition eines Residuums

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}) , \quad (5.2)$$

das die Abweichungen zwischen den gemessenen Systemgrößen  $\mathbf{x}_m$  und den berechneten Systemgrößen  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha})$  beschreibt. Die Korrekturparameter  $\boldsymbol{\alpha}$  sind, wie im folgenden Absatz beschrieben, mit ausgewählten Parametern des FE-Modells verknüpft. Gesucht sind die Korrekturparameter  $\boldsymbol{\alpha}$ , die das Residuum bestmöglich minimieren.

### 5.1.1 Parametrisierung der Systemmatrizen

Die gesuchten physikalischen Größen sind die Steifigkeit, die Dämpfung und die Masse des Systems. Diese Größen sind mit den einzelnen Elementen des Korrekturmodells verknüpft, wodurch die Korrektur von der Diskretisierung der Modellgleichungen abhängt.

Die Korrektur aller Einträge der Systemmatrizen führt im Allgemeinen zu schlechten Ergebnissen, zudem ist der numerische Aufwand sehr hoch. Der Summenansatz nach *Natke* [76]

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\boldsymbol{\alpha}) &= \mathbf{M}_0 + \sum_{j=1}^J \alpha_{Mj} \mathbf{M}_j \\ \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) &= \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^K \alpha_{Bk} \mathbf{B}_k \\ \mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}) &= \mathbf{K}_0 + \sum_{l=1}^L \alpha_{Kl} \mathbf{K}_l \end{aligned} \tag{5.3}$$

splittet die Systemmatrizen in einen festen Anteil (Index 0) und die Korrekturmatri-zen (Indizes  $j, k, l$ ) auf. Mit dem festen Anteil können a priori Kenntnisse über das Tragwerk berücksichtigt werden, die Korrekturmatri-zen sind ausgewählten Substruk-turen des Tragwerks zugeordnet und mit den Korrekturparametern  $\alpha$  verknüpft. Die Qualität der Parameterkorrektur hängt wesentlich von der richtigen Wahl der Korrekturmatri-zen ab. Die Bestimmung der für das Tragverhalten wesentlichen Parameter und Substrukturen erfordert bereits gute Vorkenntnisse über das Tragverhalten und viel Erfahrung. Für eine eindeutige Identifikation empfiehlt es sich, so wenig Substrukturen wie möglich zu verwenden und diese den Bereichen des Tragwerks zu-zuweisen, welche die größten Unsicherheiten aufweisen. In der Praxis hat es sich bewährt, nicht alle Matrizen gleichzeitig zu berücksichtigen, sondern zunächst aus-schließlich die Steifigkeit, dann die Masse und zuletzt die Dämpfung zu korrigieren und die Arbeitsschritte ggf. zu wiederholen.

#### Berücksichtigung nicht gemessener Freiheitsgrade

Die Anzahl der Freiheitsgrade eines FE-Modells übersteigt die Anzahl der gemesse-nen Freiheitsgrade in aller Regel bei Weitem,  $k_{FE} \gg k_m$ . Zum einen ist die Anzahl der Sensoren begrenzt, zum anderen ist die Messung von Verdrehungen oder Schnitt-größen technisch kaum möglich. Für die Systemidentifikation ist es jedoch erforder-lich, dass die Anzahl der Freiheitsgrade übereinstimmt,  $k_{FE} = k_m$ , um Modell und Messung miteinander vergleichen zu können. Eine Möglichkeit die Anzahl der Freiheitsgrade anzugleichen besteht darin, die im Modell enthaltenen Freiheitsgrade zu



reduzieren. Bei der dynamischen Kondensation wird die Bewegungsgleichung (5.1) zunächst nach gemessenen Freiheitsgraden  $\mathbf{x}_m$  und nicht gemessenen Freiheitsgraden  $\mathbf{x}_n$  sortiert,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{mm}(\Omega) & \mathbf{S}_{mn}(\Omega) \\ \mathbf{S}_{nm}(\Omega) & \mathbf{S}_{nn}(\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_m \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix} . \quad (5.4)$$

Anschließend erfolgt die Ablösung der nicht gemessenen Freiheitsgrade,

$$[\mathbf{S}_{mm}(\Omega) - \mathbf{S}_{mn}(\Omega) \mathbf{S}_{nn}^{-1}(\Omega) \mathbf{S}_{nm}(\Omega)] \mathbf{x}_m = \mathbf{p}_m - \mathbf{S}_{mn}(\Omega) \mathbf{S}_{nn}^{-1}(\Omega) \mathbf{p}_n . \quad (5.5)$$

Für die Berechnung eines Frequenzspektrums ist es erforderlich, die Inverse  $\mathbf{S}_{nn}^{-1}(\Omega)$  für jede Erregerfrequenz  $\Omega$  neu zu bestimmen. Der Berechnungsaufwand verringert sich gegenüber dem Gesamtsystem also nicht.

Die Eigenfrequenzen des reduzierten Systems sind nicht direkt mit den reduzierten Systemmatrizen nach Gleichung (5.5) ermittelbar, da die Inverse  $\mathbf{S}_{nn}^{-1}(\Omega)$  von den gesuchten Eigenfrequenzen abhängt. Es gibt verschiedene Näherungsverfahren, um die aus der Invertierung folgenden Einschränkungen zu überwinden. So können z. B. die zu den abzulösenden Freiheitsgraden gehörenden Matrizen mit einem fest vorgegebenen Wert  $\Omega = \bar{\Omega}$  aufgestellt werden,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{red}(\Omega) &= \mathbf{S}_{mm}(\Omega) - \mathbf{S}_{mn}(\bar{\Omega}) \mathbf{S}_{nn}^{-1}(\bar{\Omega}) \mathbf{S}_{nm}(\bar{\Omega}) , \\ \mathbf{p}_{red}(\Omega) &= \mathbf{p}_m(\Omega) - \mathbf{S}_{mn}(\bar{\Omega}) \mathbf{S}_{nn}^{-1}(\bar{\Omega}) \mathbf{p}_n(\bar{\Omega}) . \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die statische Kondensation nach Guyan ist mit  $\bar{\Omega} = 0$  als Sonderfall in Gleichung (5.6) enthalten und vernachlässigt alle Massenträgheits- und Dämpfungskräfte der abzulösenden Freiheitsgrade.

Alternativ zur Kondensation können die nicht gemessenen Freiheitsgrade mit Hilfe des Ausgangsmodells näherungsweise extrapoliert werden. Die Biegelinie folgt nach Einprägung der gemessenen Größen in das Berechnungsmodell und ist in jedem Iterationsschritt  $i$  mit dem aktuellen Modell erneut zu berechnen,

$$\mathbf{x}_{n,i+1} = \mathbf{S}_{nn,i}^{-1}(\Omega) [\mathbf{p}_n - \mathbf{S}_{nm,i}(\Omega) \mathbf{x}_m] . \quad (5.7)$$

Für die Korrektur stehen dann alle Freiheitsgrade zur Verfügung.

## 5.1.2 Fehlerquadratmethode

Ziel der Fehlerquadratmethode ist die Bestimmung der Korrekturparameter  $\alpha$ , die das Fehlerquadrat  $J(\alpha)$  bestmöglich minimieren. Liegen die Messdaten aus  $R$  unabhängigen Versuchen vor, ist entsprechend die Fehlerquadratsumme zu minimieren,

$$J(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^R \mathbf{f}_r^T \mathbf{W} \mathbf{f}_r \xrightarrow{\alpha} \min, \quad (5.8)$$

mit dem Residuum  $\mathbf{f} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}(\alpha)$  nach Gleichung (5.2). Eine Wichtung des Fehlerquadrates ist mit der Wichtungsmatrix  $\mathbf{W}$  möglich. Mit den notwendigen Bedingungen für das Minimum,

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} d\alpha \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow d\alpha \left\{ \sum_{r=1}^R \frac{\partial \mathbf{f}_r^T}{\partial \alpha} \mathbf{W} \mathbf{f}_r \right\} \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.9)$$

stehen die Gleichungen für die Bestimmung der unbekannten Korrekturparameter  $\alpha$  zur Verfügung. Im Allgemeinen handelt es sich hier um ein nichtlineares Minimierungsproblem, wenn die Systemmatrizen von den gesuchten Korrekturparametern abhängen. Das Gleichungssystem wird linearisiert, um die Aufgabe iterativ lösen zu können. Hierfür wird der Vektor  $\mathbf{x}(\alpha)$  in einer Taylorreihe nach den Korrekturparametern um den Ausgangszustand  $\alpha_0$  entwickelt und nach dem linearen Reihenglied abgebrochen,

$$\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{x}(\alpha_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{x}(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \Delta \alpha + \mathbf{R}. \quad (5.10)$$

Eingesetzt in das Residuum (5.2) folgt

$$\mathbf{f} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}(\alpha_0) - \left. \frac{\partial \mathbf{x}(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \Delta \alpha = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}(\alpha_0) - \mathbf{D} \Delta \alpha. \quad (5.11)$$

Die Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{D}$  fasst die partiellen Ableitungen des Systemvektors nach den Korrekturparametern im Ausgangszustand  $\alpha_0$  zusammen. Das Gleichungssystem zur Ermittlung des inkrementellen Zuwachses im aktuellen Iterationsschritt folgt nach Einsetzen des Residuums in die notwendigen Bedingungen (5.9) zu

$$\sum_{r=1}^R \mathbf{D}_r^T \mathbf{W} \mathbf{D}_r \Delta \alpha = \sum_{r=1}^R \mathbf{D}_r^T \mathbf{W} [\mathbf{x}_{mr} - \mathbf{x}(\alpha_0)]. \quad (5.12)$$

Nach jedem Iterationsschritt  $i$  erfolgt die Aktualisierung der Korrekturparameter

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + \Delta \alpha, \quad (5.13)$$

bis die geforderte Genauigkeit erreicht ist.

## Stabilisierung

Bei der indirekten Identifikation handelt es sich um ein inverses, schlecht gestelltes Problem. Ein mathematisches Problem heißt schlecht gestellt, wenn es keine eindeutige Lösung besitzt oder kein stetiger Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgrößen besteht, siehe *Louis* [67]. Dies führt im Rahmen der Optimierung mit der Fehlerquadratmethode auf eine schlecht konditionierte Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{D}$ . Eine hohe Konditionszahl bedeutet, dass die einzelnen Zeilen der Matrix annähernd linear abhängig sind. Die numerische Lösung reagiert dann äußerst sensibel auf Störungen der Eingangsdaten und die Stabilität der iterativen Berechnung von Gleichung (5.12) ist nicht gewährleistet.

Bei der Tikhonov-Regularisierung [89] ist Gleichung (5.8) dahingehend zu erweitern, dass neben dem gewichteten Fehlerquadrat auch der Zuwachs der Korrekturparameter  $\Delta\alpha$  im Iterationsschritt  $i$  minimiert wird,

$$J(\alpha) = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{W} \mathbf{f} + \frac{1}{2} \Delta\alpha^T \mathbf{W}_T \Delta\alpha \xrightarrow{\alpha} \min \quad (5.14)$$

$$\Rightarrow (\mathbf{D}^T \mathbf{W} \mathbf{D} + \mathbf{W}_T) \Delta\alpha = \mathbf{D}^T \mathbf{W} [\mathbf{x}_m - \mathbf{x}(\alpha_0)] \quad (5.15)$$

Der Strafterm in Form der Matrix  $\mathbf{W}_T$  stabilisiert die Berechnung in dem Fall einer schlecht konditionierten oder singulären Matrix  $\mathbf{D}_r^T \mathbf{W} \mathbf{D}_r$ . Die Kunst liegt darin, die Stabilisierungsmatrix  $\mathbf{W}_T$  so zu wählen, dass sie die Rechnung stabilisiert, ohne das Ergebnis zu verfälschen. Eine einfache, aber effektive Möglichkeit ist die Wichtung mit der Einheitsmatrix, multipliziert mit einem Wichtungsfaktor  $\mathbf{W}_T = \mathbf{E} w_T$ . Die Wahl des richtigen Wichtungsfaktors  $w_T$  läuft häufig auf „trial and error“ hinaus. Ansätze zur systematischen Regularisierung sind in *Link* [62], *Ahmadian* [1] oder *Friswell* [36] zu finden.

## Sensitivitätsuntersuchung

Einen Hinweis auf die Kopplung zwischen den gewählten Korrekturmatrizen gibt die Matrix  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ . *Natke* [76] beschreibt, dass die Inverse  $(\mathbf{D}_r^T \mathbf{D}_r)^{-1}$  für kleine Messfehler die Kovarianzmatrix der Korrekturparameter annähert. Die Kovarianzmatrix enthält Informationen über die Streuung der ermittelten Zustandsvektoren, weshalb die Norm  $\|(\mathbf{D}_r^T \mathbf{D}_r)^{-1}\|$  ein Gütekriterium darstellt, mit dem verschiedene Aufteilungen in Substrukturen, aber auch unterschiedliche Residuen miteinander verglichen werden können.

### 5.1.3 Maximum-Likelihood-Methode

Die Funktion  $p(\mathbf{x} | \alpha)$  beschreibt die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariablen  $\mathbf{x}$  bei fest vorgegebenen Modellparametern  $\alpha$ . Für normalverteilte Messfehler gilt

$$p(\mathbf{x}_m | \alpha) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \Sigma_x}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \mathbf{f}^T \Sigma_x^{-1} \mathbf{f} \right] , \quad (5.16)$$

mit der Kovarianzmatrix der Messfehler  $\Sigma_x$  und dem Residuenvektor  $\mathbf{f} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}(\alpha)$  nach Gleichung (5.2) mit  $N$  Einträgen.

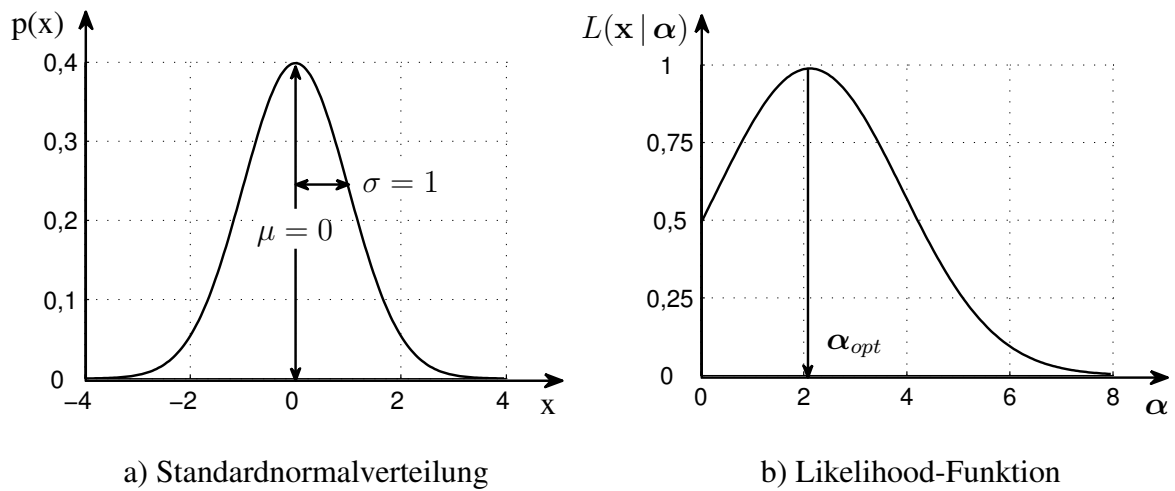


Bild 5.1: Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Anstatt bei gegebenen Modellparametern  $\alpha$  die Wahrscheinlichkeit für eine Realisation zu ermitteln, stellt sich bei der Maximum-Likelihood-Methode die Frage: Welche Modellparameter  $\alpha$  sind bei fest vorgegebenen - da gemessenen - Realisationen  $\mathbf{x}_{mr}$  am wahrscheinlichsten? Für  $R$  unabhängige Messungen gilt

$$L(\mathbf{x} | \alpha) = p(\mathbf{x}_{m1}, \mathbf{x}_{m2}, \dots, \mathbf{x}_{mR} | \alpha) = \prod_{r=1}^R p(\mathbf{x}_{mr} | \alpha) . \quad (5.17)$$

Die Art der Verteilung des Messrauschens muss bekannt sein, um die Likelihood-Funktion  $L(\mathbf{x} | \alpha)$  aufzustellen. Im Fall eines normalverteilten Messrauschens gilt

$$L(\mathbf{x} | \alpha) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{NR} (\det \Sigma_x)^R}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^R \mathbf{f}_r^T \Sigma_x^{-1} \mathbf{f}_r \right] . \quad (5.18)$$

Bild 5.1 zeigt die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung mit dem Mittelwert  $\mu = 0$ , der Standardabweichung  $\sigma = 1$  und dem Flächeninhalt  $A = 1$  sowie den typischen Verlauf einer Likelihood-Funktion.

Gesucht sind neben den Modellparametern  $\alpha$  auch die Einträge der Messfehlerkovarianzmatrix  $\Sigma_x$ , welche die Maximum-Likelihood-Funktion maximieren,

$$L(\mathbf{x} | \alpha) \xrightarrow{\alpha} \max \quad \text{und} \quad L(\mathbf{x} | \alpha) \xrightarrow{\Sigma_x} \max . \quad (5.19)$$

Es gelten die notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial L(\mathbf{x} | \alpha)}{\partial \alpha} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial L(\mathbf{x} | \alpha)}{\partial \Sigma_x} \stackrel{!}{=} 0 . \quad (5.20)$$

Für die numerische Umsetzung ist es von Vorteil, mit der logarithmierten Funktion  $\log L(\mathbf{x} | \alpha)$  zu arbeiten, deren Maximum an gleicher Stelle liegt, *Goodwin* [42]. Mit

$$\log L(\mathbf{x} | \alpha) = -\frac{1}{2}RN \log 2\pi - \frac{1}{2}R \log \det \Sigma_x - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^R \mathbf{f}_r^T \Sigma_x^{-1} \mathbf{f}_r \quad (5.21)$$

und den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \log L(\mathbf{x} | \alpha)}{\partial \alpha} = - \sum_{r=1}^R \frac{\partial \mathbf{f}_r^T}{\partial \alpha} \Sigma_x^{-1} \mathbf{f}_r \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \log L(\mathbf{x} | \alpha)}{\partial \Sigma_x} = -\frac{1}{2} R \Sigma_x^{-1} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^R \Sigma_x^{-1} \mathbf{f}_r \mathbf{f}_r^T \Sigma_x^{-1} \quad (5.23)$$

und Gleichung (5.11) folgen die Bestimmungsgleichungen im Iterationsschritt zu

$$\sum_{r=1}^R \mathbf{D}_r^T \Sigma_x^{-1} \mathbf{D}_r \Delta \alpha = \sum_{r=1}^R \mathbf{D}_r^T \Sigma_x^{-1} [\mathbf{x}_m - \mathbf{x}(\alpha_0)] , \quad (5.24)$$

$$\Sigma_x = \sum_{r=1}^R \frac{1}{R} \mathbf{f}_r \mathbf{f}_r^T . \quad (5.25)$$

Für die Optimierung mit der Maximum-Likelihood-Methode muss die Verteilung des Messfehlers a priori bekannt sein. Im Falle eines normalverteilten Messfehlers ergibt sich das gleiche Zielfunktional wie bei der Fehlerquadratmethode mit  $\mathbf{W} = \Sigma_x^{-1}$ .

Die Wichtung von Gleichung (5.12) mit der inversen Kovarianzmatrix der Messwerte wird auch als Markov-Schätzung bezeichnet und liefert die Schätzwerte mit minimaler Varianz, da die Messwerte mit geringer Varianz infolge der Wichtung stärker berücksichtigt werden als Messwerte mit hoher Varianz, *Eykhoﬀ* [29]. Die Kovarianzmatrix ist im ersten Iterationsschritt mit der Einheitsmatrix abzuschätzen und in jedem weiteren Schritt nach Gleichung (5.25) zu berechnen.

Die Maximum-Likelihood-Methode ist asymptotisch erwartungstreu, der Schätzer konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  gegen den Erwartungswert. Die Vorteile der Maximum-Likelihood-Methode treten vor allem in den Ausnahmefällen zutage, wenn das Messrauschen zwar bekannt, jedoch nicht normalverteilt ist.

### 5.1.4 Bayes-Schätzung

Bei der Bayes-Schätzung wird auch für die Modellparameter  $\alpha$  ein statistisches Modell mit der a priori Wahrscheinlichkeit  $p(\alpha)$  gewählt. Das Bayes-Theorem stellt eine Rechenvorschrift für die bedingte Wahrscheinlichkeit  $p(\alpha | \mathbf{x})$  dar und erlaubt das Vertauschen von Ursache und Wirkung:

$$p(\alpha | \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | \alpha) p(\alpha)}{p(\mathbf{x})} \sim L(\mathbf{x} | \alpha) p(\alpha) . \quad (5.26)$$

Die a posteriori Wahrscheinlichkeit ist proportional zu der Likelihood-Funktion, multipliziert mit der a priori Wahrscheinlichkeit der Modellparameter  $p(\alpha)$ . Die a priori Wahrscheinlichkeit  $p(\mathbf{x})$  ist bei gegebenen Messwerten konstant, dient ausschließlich der Normierung und ist daher bei der Suche nach den Maxima der Funktion  $p(\alpha | \mathbf{x})$  vernachlässigbar.

Werden auch die Modellparameter a priori als normalverteilt angenommen, gilt

$$p(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{N_a} \det \Sigma_a}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \mathbf{g}^T \Sigma_a^{-1} \mathbf{g} \right] , \quad (5.27)$$

mit  $\mathbf{g} = \bar{\alpha} - \alpha_0$ , dem a priori Erwartungswert  $\bar{\alpha}$  und der Kovarianzmatrix der Modellparameter  $\Sigma_a$ . Aus den Gleichungen (5.18), (5.26) und (5.27) folgt das Funktional

$$p(\alpha | \mathbf{x}) \sim \frac{1}{\sqrt{(\det \Sigma_x)^R \det \Sigma_a}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^R \mathbf{f}_r^T \Sigma_x^{-1} \mathbf{f}_r - \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \Sigma_a^{-1} \mathbf{g} \right] . \quad (5.28)$$

Für die numerische Umsetzung ist wiederum von der logarithmierten Funktion auszugehen. Analog zu Abschnitt 5.1.3 folgt das Gleichungssystem

$$\sum_{r=1}^R (\mathbf{D}_r^T \Sigma_x^{-1} \mathbf{D}_r + \Sigma_a^{-1}) \Delta \alpha = \sum_{r=1}^R \mathbf{D}_r^T \Sigma_x^{-1} [\mathbf{x}_m - \mathbf{x}(\alpha_0)] + \Sigma_a^{-1} [\bar{\alpha} - \alpha_0] . \quad (5.29)$$

Mit dem a priori Erwartungswert  $\bar{\alpha}$  ist es möglich, Vorkenntnisse über die Modellparameter zu berücksichtigen, die über die Matrix  $\Sigma_a$  zu wichten sind. Werden anstelle eines festen Erwartungswertes jeweils die Korrekturparameter des letzten Iterationsschrittes verwendet,  $\bar{\alpha} = \alpha_0$ , verschwindet der entsprechende Term auf der rechten Seite. In diesem Fall entspricht Gleichung (5.29) der Tikhonov-Regularisierung nach Gleichung (5.15) mit der Stabilisierungsmatrix  $\mathbf{W}_T = \Sigma_a^{-1}$ .

## 5.2 Residuen

Die nachfolgend vorgestellten Residuen beschränken sich auf den Frequenzbereich und werden nur für Messdaten aus einem Versuch angegeben. Für mehrere unabhängige Versuche sind die Zielfunktionale entsprechend Gleichung (5.8) zu erweitern. Die Aufbereitung der Gleichungen erfolgt für die Fehlerquadratmethode. Das Vorgehen ist jedoch analog auf die Maximum-Likelihood-Methode sowie auf die Bayes-Schätzung übertragbar.

### 5.2.1 Korrektur der Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion  $H(i\Omega)$  nach Gleichung (2.20) enthält bereits viele Informationen über das untersuchte System. Es ist daher naheliegend, diese Informationen auch für die Ermittlung physikalischer Parameter mit Hilfe der Fehlerquadratmethode zu nutzen. Hierfür wird das Frequenzspektrum an  $N$  Stellen ausgewertet. Während im Antiresonanzbereich das Messrauschen gegenüber der Systemantwort dominiert und damit der Informationsgehalt gegen null tendiert, sind im Resonanzpeak die Unsicherheiten sehr groß. Für die Korrektur eignen sich daher die dazwischen liegenden Bereiche, die in Bild 5.2 grau hinterlegt sind. Im Bereich einer Eigenfrequenz enthält bereits ein Messwert nahezu alle Informationen über das Schwingungsverhalten. Weitere Messwerte liefern wenig zusätzliche Systeminformationen, können aber dabei helfen, das im Signal enthaltene Messrauschen herauszumitteln.

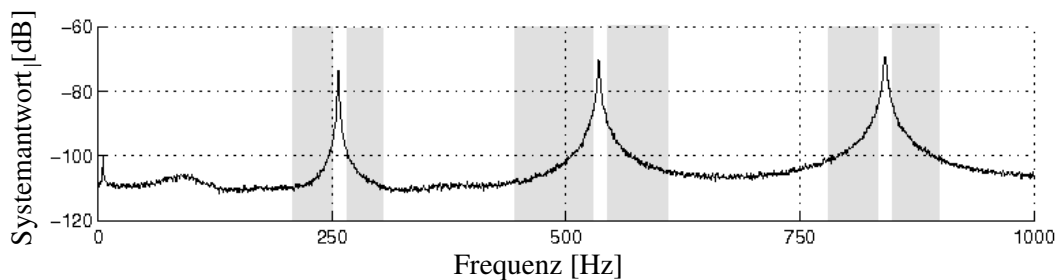


Bild 5.2: Für die Korrektur geeignete Bereiche des Frequenzspektrums

### Eingangsgrößenverfahren

Das Eingangsgrößenresiduum beschreibt den Fehler zwischen gemessenen Eingangsgrößen  $p_m$  und berechneten Eingangsgrößen  $p(\alpha)$ ,

$$\mathbf{f}_E = \mathbf{p}_m - \mathbf{p}(\alpha) , \quad (5.30)$$

wenn das System mit der Frequenz  $\Omega$  angeregt wird. Mit der Taylorreihe (5.10) und

der Bewegungsgleichung (5.1) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_E &= \mathbf{p}_m - \mathbf{p}(\alpha_0) - \left. \frac{\partial \mathbf{p}(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \Delta \alpha \\ &= \mathbf{p}_m - \mathbf{S}_{\alpha_0} \mathbf{x}_m - \underbrace{\left. \frac{\partial \mathbf{S}(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0}}_{\mathbf{D}} \mathbf{x}_m \Delta \alpha . \end{aligned} \quad (5.31)$$

Die Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{D}$  enthält die partiellen Ableitungen der dynamischen Steifigkeitsmatrix nach den Korrekturparametern,

$$\frac{\partial \mathbf{S}(\alpha)}{\partial \alpha_{Mj}} = -\Omega^2 \mathbf{M}_j , \quad \frac{\partial \mathbf{S}(\alpha)}{\partial \alpha_{Bk}} = i \Omega \mathbf{B}_k \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{S}(\alpha)}{\partial \alpha_{Kl}} = \mathbf{K}_l , \quad (5.32)$$

multipliziert mit den gemessenen Ausgangsgrößen. Mit  $j, k, l = 1 \dots J, K, L$  Korrekturparametern und  $n = 1 \dots N$  berücksichtigten Frequenzen folgt

$$\mathbf{D} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} -\Omega_1^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{x}_{m1} \cdots - \Omega_1^2 \mathbf{M}_J \mathbf{x}_{m1} & i \Omega_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{x}_{m1} \cdots i \Omega_1 \mathbf{B}_K \mathbf{x}_{m1} & \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_{m1} \cdots \mathbf{K}_L \mathbf{x}_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Omega_N^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{x}_{mN} \cdots - \Omega_N^2 \mathbf{M}_J \mathbf{x}_{mN} & i \Omega_N \mathbf{B}_1 \mathbf{x}_{mN} \cdots i \Omega_N \mathbf{B}_K \mathbf{x}_{mN} & \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_{mN} \cdots \mathbf{K}_L \mathbf{x}_{mN} \end{array} \right) .$$

Das Gleichungssystem (5.12) zur Bestimmung der Korrekturparameter mit dem Eingangsgrößenverfahren folgt zu

$$\mathbf{D}^T \mathbf{W} \mathbf{D} \Delta \alpha = \mathbf{D}^T \mathbf{W} \underbrace{[\mathbf{p}_m - \mathbf{S}_{\alpha_0} \mathbf{x}_m]}_{\mathbf{f}_E(\alpha_0)} . \quad (5.33)$$

Eingangsgrößen sind mechanische Lasten oder elektrische Oberflächenladungen, falls der piezoelektrische Effekt implizit in der Korrektur berücksichtigt ist. Der Sonderfall der statischen Belastung ist mit  $\Omega = 0$  in der Formulierung enthalten. Die Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{D}$  des Eingangsgrößenresiduums ist unabhängig von den Korrekturparametern und das resultierende Gleichungssystem somit linear.

Die Qualität der gemessenen Eingangsgrößen  $\mathbf{p}_m$  ist in der Regel sehr viel höher als die Qualität der gemessenen Ausgangsgrößen  $\mathbf{x}_m$ . Die Ausgangsgrößen sind jedoch in der Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{D}$  enthalten, und werden im Residuum  $\mathbf{f}_E(\alpha_0)$  noch zusätzlich mit der dynamischen Steifigkeitsmatrix des Referenzmodells multipliziert. Bei verrauschten Messdaten ist das Eingangsgrößenresiduum daher fehleranfällig.



## Ausgangsgrößenverfahren

Das Ausgangsgrößenresiduum beschreibt den Fehler zwischen gemessenen Ausgangsgrößen  $\mathbf{x}_m$  und berechneten Ausgangsgrößen  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha})$ ,

$$\mathbf{f}_A = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (5.34)$$

Mit der Taylorreihe (5.10) und der Bewegungsgleichung (5.1) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_A &= \mathbf{x}_m - \mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}_0) - \left. \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right|_{\boldsymbol{\alpha}_0} \Delta \boldsymbol{\alpha} \\ &= \mathbf{x}_m - \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{p}_m - \underbrace{\left. \frac{\partial \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})^{-1}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right|_{\boldsymbol{\alpha}_0}}_{\mathbf{D}} \mathbf{p}_m \Delta \boldsymbol{\alpha} . \end{aligned} \quad (5.35)$$

Die Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{D}$  enthält die partiellen Ableitungen

$$\left. \frac{\partial \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})^{-1}}{\partial \alpha_{Mj}} \right|_{\boldsymbol{\alpha}_0} = \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{M}_j \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} , \quad (5.36)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})^{-1}}{\partial \alpha_{Bk}} \right|_{\boldsymbol{\alpha}_0} = \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{B}_k \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} , \quad (5.37)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})^{-1}}{\partial \alpha_{Kl}} \right|_{\boldsymbol{\alpha}_0} = \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{K}_l \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} , \quad (5.38)$$

multipliziert mit den gemessenen Eingangsgrößen. Für  $j, k, l = 1 \dots J, K, L$  Korrekturparameter und  $n = 1 \dots N$  berücksichtigte Erregerfrequenzen folgt

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\Omega_1^2 \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{p}_{m1} & \dots & -\Omega_1^2 \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{M}_J \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{p}_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Omega_N^2 \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{p}_{mN} & \dots & -\Omega_N^2 \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{M}_J \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{p}_{mN} \\ i \Omega_1 \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{p}_{m1} & \dots & i \Omega_1 \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{B}_K \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{p}_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ i \Omega_N \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{p}_{mN} & \dots & i \Omega_N \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{B}_K \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{p}_{mN} \\ \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{K}_1 \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{p}_{m1} & \dots & \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{K}_L \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{p}_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{K}_1 \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{p}_{mN} & \dots & \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{K}_L \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{p}_{mN} \end{pmatrix} .$$

Die Sensitivitätsmatrix hängt jetzt implizit von den Korrekturparametern ab, wodurch die Optimierung nichtlinear wird. Die Änderungen der Korrekturparameter nach Gleichung (5.12) ergeben sich im aktuellen Iterationsschritt  $i$  zu

$$\mathbf{D}^T \mathbf{W} \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{D}^T \mathbf{W} \underbrace{[\mathbf{x}_m - \mathbf{S}_{\boldsymbol{\alpha}_0}^{-1} \mathbf{p}_m]}_{\mathbf{f}_A(\boldsymbol{\alpha}_0)} . \quad (5.39)$$

Ausgangsgrößen sind Verschiebungen oder elektrische Potentiale. Gegenüber dem Eingangsgrößenresiduum gehen jetzt die gemessenen Eingangsgrößen  $\mathbf{p}_m$  in die Sensitivitätsmatrix ein. Deren Genauigkeit ist meist höher als die Genauigkeit der Ausgangsgrößen. Zudem führt die Multiplikation mit der Nachgiebigkeitsmatrix zu einer Glättung des Residuums  $\mathbf{f}_A(\alpha_0)$ . Das Verfahren ist daher wesentlich robuster gegenüber Messrauschen.

### Gemischtes Verfahren

Das gemischte Verfahren entsteht durch Linksmultiplikation des Eingangsgrößenresiduums  $\mathbf{f}_E$  mit der Frequenzgangmatrix  $\mathbf{S}_{\alpha_0}^{-1}$ . Das Residuum entspricht dem Ausgangsgrößenresiduum,  $\mathbf{f}_G(\alpha_0) = \mathbf{f}_A(\alpha_0)$ . Lediglich in der Sensitivitätsmatrix werden die Terme  $\mathbf{S}_{\alpha_0}^{-1}\mathbf{p}_m$  durch die Ausgangsgrößen  $\mathbf{x}_m$  ersetzt. Solange die Referenzlösung  $\mathbf{S}_{\alpha_0}$  stark von der optimalen Lösung abweicht, reagiert das gemischte Residuum numerisch stabiler als das Ausgangsgrößenresiduum. In der Nähe des Optimums beeinflusst dann allerdings das in  $\mathbf{x}_m$  enthaltene Messrauschen zunehmend die Optimierung.

### 5.2.2 Korrektur modaler Größen

Alternativ zu den gemessenen Ein- und Ausgangsgrößen kann die Korrektur auch mit modalen Größen wie Eigenfrequenzen und Eigenmoden erfolgen. Da für die Messung normalerweise nur wenige Sensoren zur Verfügung stehen, sind nur die zu den untersten Eigenfrequenzen gehörenden Eigenmoden messbar. Des Weiteren beinhaltet die Extrapolation der Eigenmoden aus limitierten Messdaten große Unsicherheiten. Mit Hilfe von Laser-Vibrometern ist eine höhere Auflösung erzielbar, die Anwendung ist jedoch auf den Laborbetrieb beschränkt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich gemessene Eigenfrequenzen für die Korrektur verwendet. Diese enthalten zwar keine Informationen über das räumliche Verschiebungsfeld, sind dafür aber direkt dem Frequenzspektrum zu entnehmen. Bei der Versuchsauslegung ist darauf zu achten, dass sowohl die Sensoren als auch die Erregerkräfte nicht in den Nulldurchgängen der zu den interessierenden Eigenfrequenzen gehörenden Eigenmoden liegen. Zusätzliche Informationen über die Eigenmoden sind hilfreich, um die Eigenfrequenzen richtig zu interpretieren.

Das Eigenfrequenzresiduum beschreibt den Fehler zwischen gemessenen Eigenfrequenzen  $\omega_m$  und den Eigenfrequenzen des Korrekturmodells  $\omega(\alpha)$ ,

$$\mathbf{f}_\omega = \omega_m^2 - \omega(\alpha)^2 = \omega_m^2 - \omega_{\alpha_0}^2 - \underbrace{\frac{\partial \omega(\alpha)^2}{\partial \alpha}}_{\mathbf{D}} \bigg|_{\alpha_0} \Delta \alpha . \quad (5.40)$$

Der Vektor  $\omega_m^2$  enthält die  $N$  gemessenen Eigenfrequenzen in aufsteigender Reihenfolge. Die Korrektur ist nur dann erfolgreich, wenn eine eindeutige Zuordnung von gemessenen und berechneten Eigenfrequenzen gelingt. Dies ist in der Regel nur für die unteren Eigenfrequenzen gewährleistet. Es ist sinnvoll, die Einträge des Residuumvektors (5.40) bezüglich der gemessenen Eigenfrequenzen zu normieren,

$$f_{\omega,i} = \frac{\omega_{m,i}^2 - \omega(\alpha)_i^2}{\omega_{m,i}^2} , \quad (5.41)$$

um eine Überbewertung höherer Eigenfrequenzen zu vermeiden. Die folgende Formulierung gilt nur für ungedämpfte Systeme, ist aber bei Bedarf auf gedämpfte Systeme erweiterbar, siehe *Natke* [76]. Alle Eigenfrequenzen und Eigenmoden sind somit real, das Verfahren ist aber nur für schwach gedämpfte Tragwerke einsetzbar.

Aus der partiellen Differentiation der Eigenwertaufgabe

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{0} \quad (5.42)$$

nach den Korrekturparametern und anschließender Linksmultiplikation mit der Modalmatrix  $\hat{\mathbf{X}}^T$  folgt

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{X}}^T (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial \alpha} \\ & - \frac{\partial \omega^2}{\partial \alpha} \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{X}} - \omega^2 \hat{\mathbf{X}}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha} \hat{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha} \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{0} . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Der erste Term ist für symmetrische Matrizen gleich Null. Unter Berücksichtigung des Summenansatzes (5.3) und der Normierung  $\hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{E}$  folgen die Ableitungen der Eigenfrequenzen im Ausgangszustand  $\alpha_0$  zu

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \omega(\alpha)^2}{\partial \alpha_{Mj}} \right|_{\alpha_0} &= -\omega_{\alpha_0}^2 \hat{\mathbf{X}}_{\alpha_0}^T \mathbf{M}_j \hat{\mathbf{X}}_{\alpha_0} , \\ \left. \frac{\partial \omega(\alpha)^2}{\partial \alpha_{Kl}} \right|_{\alpha_0} &= \hat{\mathbf{X}}_{\alpha_0}^T \mathbf{K}_l \hat{\mathbf{X}}_{\alpha_0} . \end{aligned} \quad (5.44)$$

Die Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{D}$  enthält also die generalisierten Massen und Steifigkeiten der Korrekturmatriizen im Ausgangszustand  $\alpha_0$ . Mit  $n = 1 \dots N$  gemessenen Eigenkreisfrequenzen und  $j, l = 1 \dots J, L$  Korrekturparametern gilt

$$\mathbf{D} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} -\omega_1^2 \hat{\mathbf{x}}_1^T \mathbf{M}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 & \cdots & -\omega_1^2 \hat{\mathbf{x}}_1^T \mathbf{M}_J \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_1^T \mathbf{K}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{x}}_1^T \mathbf{K}_L \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\omega_N^2 \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{M}_1 \hat{\mathbf{x}}_N & \cdots & -\omega_N^2 \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{M}_J \hat{\mathbf{x}}_N & \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{K}_1 \hat{\mathbf{x}}_N & \cdots & \hat{\mathbf{x}}_N^T \mathbf{K}_L \hat{\mathbf{x}}_N \end{array} \right) .$$

Die Änderungen der Korrekturparameter mit der Fehlerquadratmethode im aktuellen Iterationsschritt  $i$  ergeben sich zu

$$\mathbf{D}^T \mathbf{W} \mathbf{D} \Delta \alpha = \mathbf{D}^T \mathbf{W} \underbrace{[\omega_{mr}^2 - \omega_{\alpha_0}^2]}_{f_{\omega}(\alpha_0)} . \quad (5.45)$$

Die Korrektur über das Eigenwertresiduum erfordert die Lösung der Eigenwertaufgabe (5.42) in jedem Iterationsschritt, was bei komplexen Modellen zu langen Berechnungszeiten führt. Anstatt die Eigenwertaufgabe zu lösen, ist es möglich, die Eigenvektoren mit dem aktuellen Referenzmodell und den gemessenen Eigenkreisfrequenzen zu ermitteln,

$$(-\omega_m^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{X}}_{\alpha_0} = \mathbf{0} , \quad (5.46)$$

wodurch der Berechnungsaufwand stark verringert wird. Solange das Referenzmodell die gemessenen Eigenfrequenzen nicht richtig abbildet, sind die ermittelten Eigenvektoren  $\hat{\mathbf{X}}_{\alpha_0}$  nicht orthogonal. Eine Abschätzung der Eigenkreisfrequenzen des Berechnungsmodells erfolgt mit der Gleichung

$$\omega_{\alpha_0}^2 = \text{diag}(\hat{\mathbf{X}}_{\alpha_0}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{X}}_{\alpha_0} / \mathbf{E}) . \quad (5.47)$$

Ein großer Vorteil dieses Residuums ist, dass die Kondensation nicht gemessener Freiheitsgrade aus dem Gleichungssystem entfällt. Problematisch sind vor allem mehrfache und nahe beieinander liegende Eigenfrequenzen, die während der Korrektur die Reihenfolge ändern können und eine eindeutige Zuordnung erschweren.

### 5.3 Numerische Untersuchungen

In diesem Abschnitt werden verschiedene Aspekte der Systemidentifikation anhand numerischer Beispiele erläutert. Untersucht werden die Auswirkungen unterschiedlicher Residuen, Lastfälle, Anregungsarten und des Messrauschens auf die Korrekturparameter sowie die Sensitivität der Messwerte gegenüber Änderungen in den physikalischen Parametern. Die Korrektur erfolgt, wenn nicht anders beschrieben, mit der Fehlerquadratmethode.

#### 5.3.1 Spundwand

Bild 5.3 zeigt das Modell einer rückverankerten Spundwand. Das FE-Modell der Spundwand besteht aus drei Bernoulli-Balkenelementen der Länge  $l = 3\text{ m}$ , deren Biegesteifigkeit  $EI = 1.000\text{ kNm}^2$  beträgt. Die Modellierung der elastischen Einspannung in den Boden erfolgt mit einer Drehfeder der Steifigkeit  $k_D = 200\text{ kNm/rad}$ , die Modellierung des Ankers mit einer Dehnfeder der Steifigkeit  $k_F = 300\text{ kN/m}$ . Die Verschiebungen infolge des Erddrucks und der Verkehrslasten sind bei der Parameterkorrektur nicht von Interesse. Für die Korrektur werden lediglich die Verschiebungen infolge der statischen Testlast  $P = 1\text{ kN}$  benötigt. In diesem Beispiel ist davon auszugehen, dass alle Freiheitsgrade des FE-Modells gemessen werden können, sodass es in dieser Hinsicht kein Informationsverlust gibt.

Die Biegesteifigkeit der Spundwand ist bekannt, gesucht sind die Federsteifigkeiten, für die ein Korrekturansatz mit  $k_D = 100\text{ kNm/rad}$  und  $k_F = 100\text{ kN/m}$  gewählt wird. Die Spundwand wird zunächst in 10 unabhängigen Versuchen am oberen Ende belastet (Lastfall 1). Die simulierten Messwerte beinhalten ein Messrauschen mit einer Standardabweichung von 1 %.

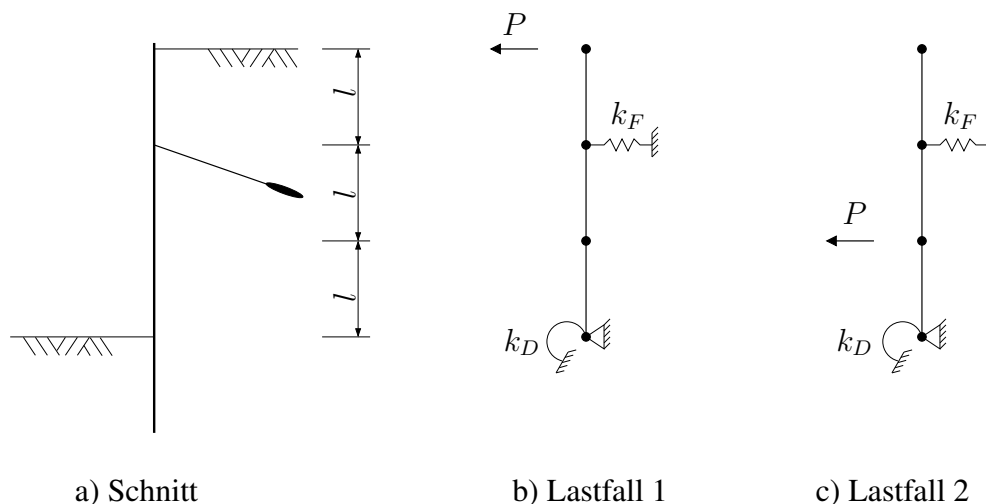


Bild 5.3: Spundwand: System und Diskretisierung

Bild 5.4a zeigt die Entwicklung der Korrekturparameter bei Verwendung des Eingangsgrößenverfahrens. Die Federsteifigkeiten sind bereits im ersten Iterationsschritt ermittelt. Eine iterative Berechnung ist nur dann erforderlich, wenn nicht alle Freiheitsgrade gemessen sind. Beim Eingangsgrößenresiduum erfolgt die Multiplikation der verrauschten Ausgangsgrößen mit der Systemmatrix des Referenzmodells, siehe (5.33), wodurch der Messfehler verstärkt wird. Das Messrauschen von 1 % in den Messdaten hat daher in diesem Beispiel eine Standardabweichung von 6 % in den ermittelten Steifigkeiten zur Folge. Die Ergebnisse sind aufgrund der starken Streuung wenig aussagekräftig und in der Praxis unbrauchbar.

Die Korrektur mit dem Ausgangsgrößenverfahren verläuft dagegen nichtlinear. Die Sensitivitätsmatrix enthält die Systemmatrix des Referenzmodells quadratisch, wodurch die Berechnung instabil werden kann, wenn das Referenzmodell stark von der Wirklichkeit abweicht. Im Ausgangsgrößenresiduum sind die unverfälschten, gemessenen Ausgangsgrößen enthalten, weshalb der Einfluss des Messrauschens geringer ausfällt, siehe Bild 5.4b. Im Beispiel wirkt sich der Effekt positiv auf die ermittelten Dehnfedersteifigkeiten  $k_F$  aus. Bei den ermittelten Drehfedersteifigkeiten  $k_D$  ist dagegen keine Verbesserung erkennbar. Dies liegt daran, dass die Drehfeder bei der gewählten Belastung nur geringe Wirkung auf die Biegelinie hat. Das Messrauschen ist gegenüber den wirklichen Verdrehungen dominant und zieht daher große Abweichungen in der ermittelten Steifigkeit nach sich.

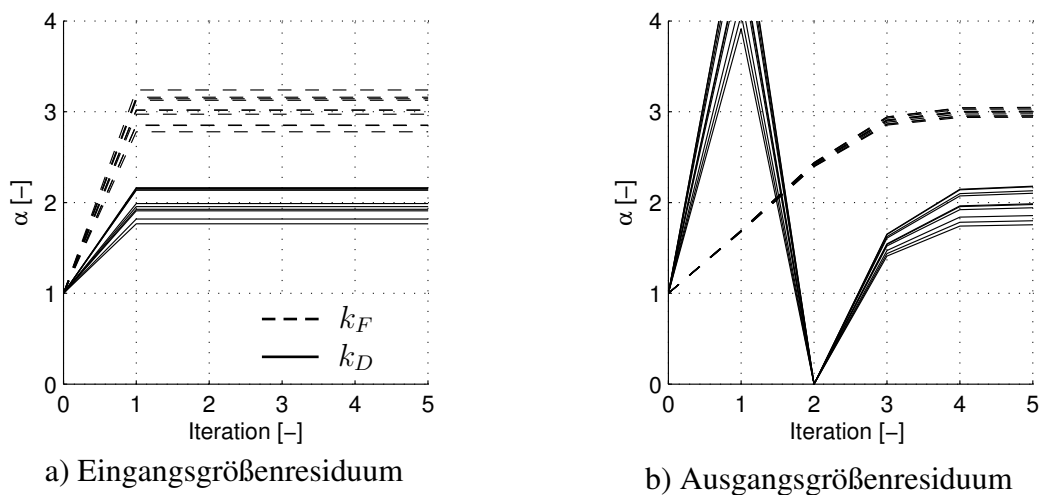


Bild 5.4: Entwicklung der Korrekturparameter, 10 Versuche bei 1 % Messrauschen, LF 1

Das gemischte Verfahren unterscheidet sich nur in der Sensitivitätsmatrix  $D$  vom Ausgangsgrößenverfahren. Das Residuum ist identisch, weshalb mit beiden Verfahren die gleichen Steifigkeiten ermittelt werden, siehe Bild 5.5a. Die Sensitivitätsmatrix beeinflusst lediglich den Verlauf der Iteration. Das gemischte Verfahren enthält die Systemmatrix des Referenzmodells nur einfach und ist daher wesentlich stabiler.

Die Art der Belastung ist insofern wichtig für die Korrektur, als dass die Parameter unterschiedlich stark angesprochen werden. So hat Lastfall 2 eine wesentlich höhere Beanspruchung der Drehfeder zur Folge. Die größeren Verdrehungen setzen sich stärker vom Messrauschen ab und die Drehfedersteifigkeit kann zuverlässiger bestimmt werden, siehe Bild 5.5b.

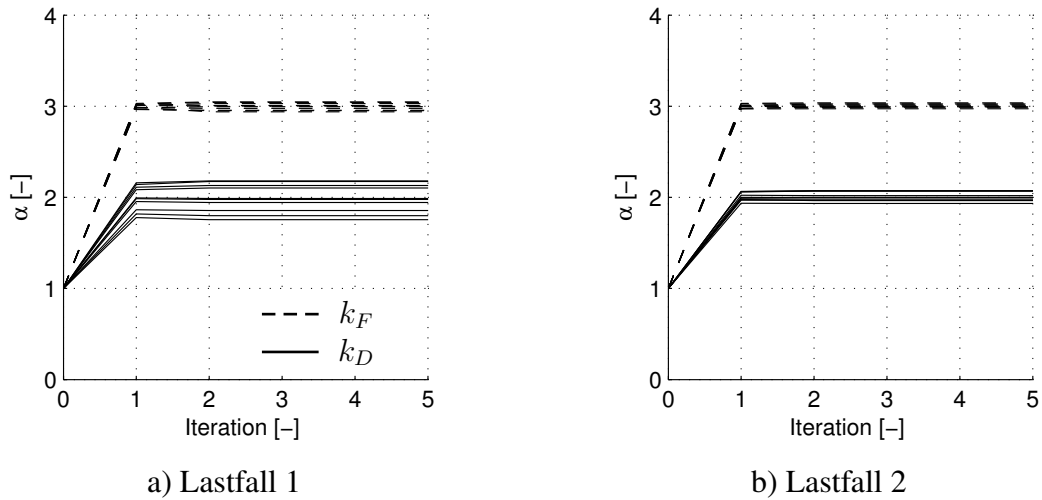


Bild 5.5: Gemischtes Verfahren, 10 Versuche bei 1% Messrauschen

Für den Fall, dass zwei Parameter gesucht sind, ist das Fehlerquadrat graphisch als Fehlerfläche darstellbar, siehe Bild 5.6. Die elliptische Form der Höhenlinien für Lastfall 1 weist darauf hin, dass die Parameter unterschiedlich starken Einfluss auf das Residuum haben und das Residuum gegenüber Änderungen in der Dehnfedersteifigkeit  $k_F$  sensibler ist, als gegenüber Änderungen in der Drehfedersteifigkeit  $k_D$ . Die kreisförmigeren Höhenlinien der Fehlerfläche für Lastfall 2 bedeuten dagegen ein ausgewogeneres Verhältnis der Parameter  $k_F$  und  $k_D$ .

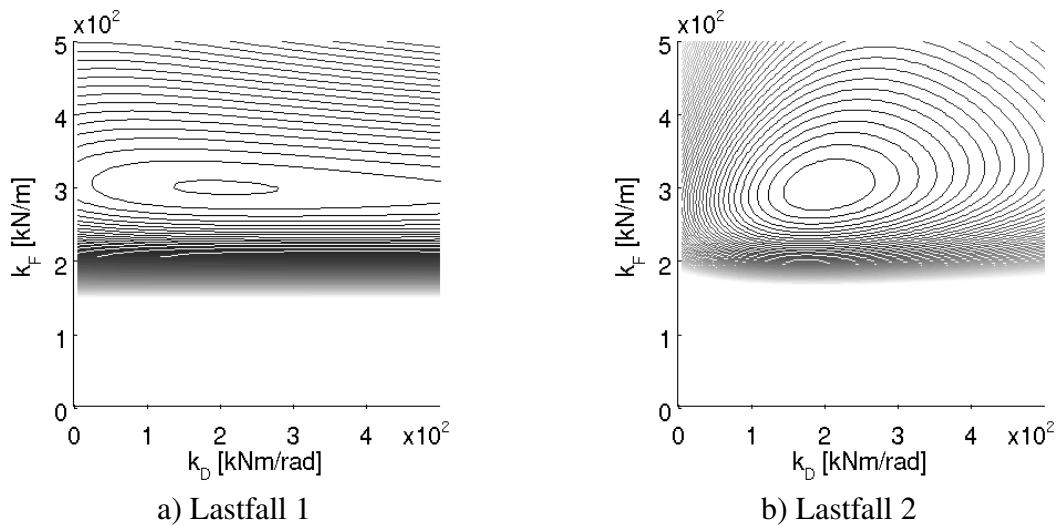


Bild 5.6: Gemischtes Verfahren, Fehlerflächen

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (WDF) in Bild 5.7 geben Hinweise auf die Qualität der erzielten Ergebnisse. Je breiter die Kurven sind, desto stärker schlägt das in den Messwerten enthaltene Messrauschen auf die ermittelten Korrekturparameter durch. In der Praxis ist es sinnvoll, die WDFs vorab numerisch für ein Referenzmodell zu simulieren, um einen geeigneten Versuchsaufbau zu bestimmen, der alle gesuchten Parameter gleichermaßen anspricht.

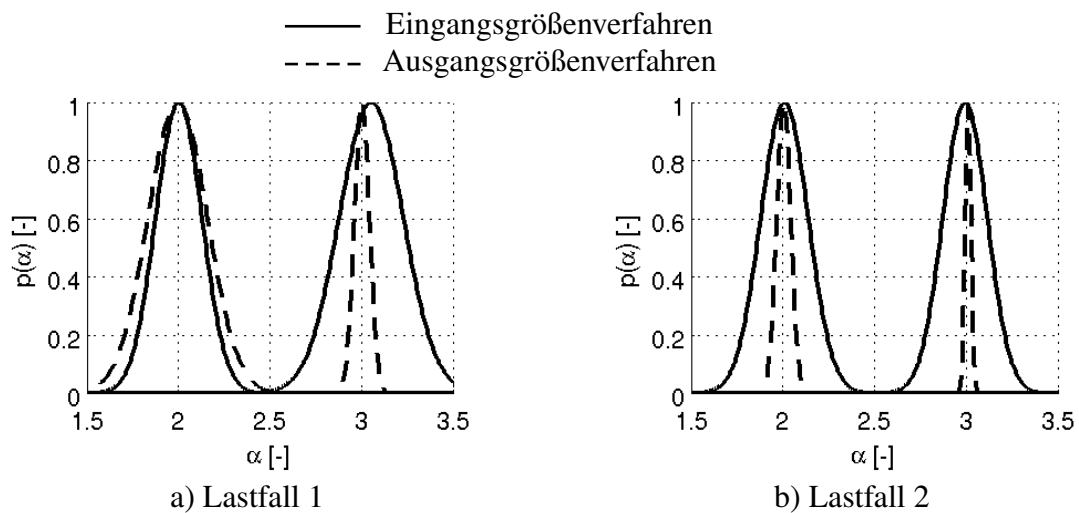


Bild 5.7: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen bei 1 % Messrauschen

Bild 5.8 zeigt die Auswirkung der Tikhonov-Regularisierung nach Gleichung (5.15) auf die Iteration bei Verwendung des Ausgangsgrößenverfahrens. Der Strafterm  $W_T$  dämpft den Fehler, der aufgrund der schlecht konditionierten Sensitivitätsmatrix auftritt und stabilisiert somit die Berechnung. Bei günstiger Wahl der Wichtungsfaktoren verläuft der Optimierungspfad geradliniger, ohne dass zusätzliche Iterationsschritte erforderlich sind.

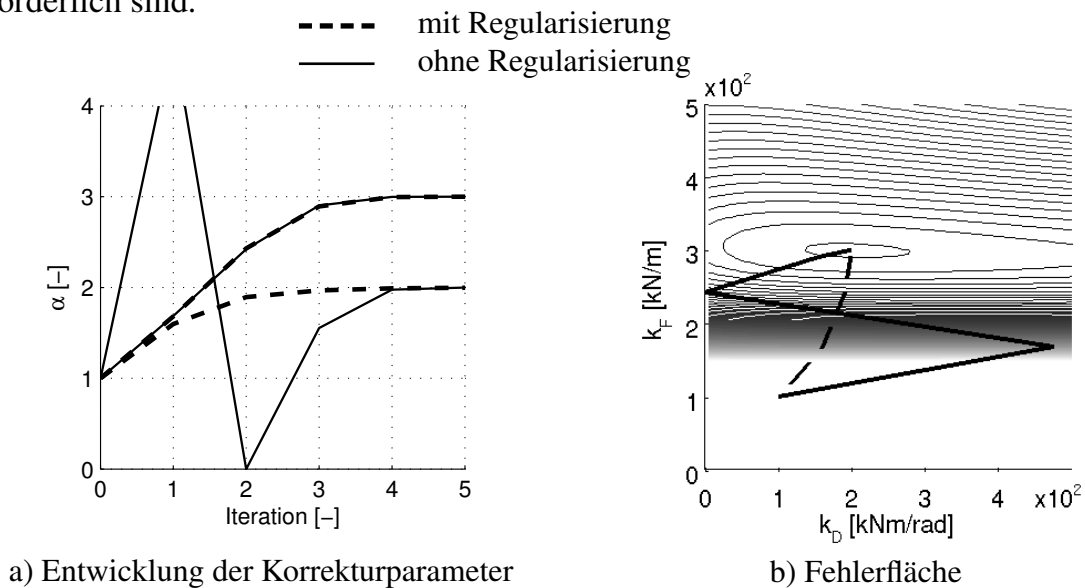


Bild 5.8: Ausgangsgrößenverfahren mit Tikhonov-Regularisierung



### 5.3.2 Sensitivitätsuntersuchung am Kragarm

Die wesentlichen Eingangsparameter bei der Bestimmung der Eigenfrequenzen eines Systems sind die physikalischen Parameter Steifigkeit, Masse, Dämpfung sowie Geometrie und Randbedingungen. Im Folgenden wird die Sensitivität der Eigenfrequenzen gegenüber Änderungen in den Systemparametern am Beispiel eines Kragarms untersucht. Das Referenzmodell hat die Abmessungen  $l/b/h = 1,0/0,1/0,006$  m und ist mit 100 Bernoulli-Balkenelementen diskretisiert. Die Biegesteifigkeit beträgt  $EI = 378 \text{ Nm}^2$ , die Dichte  $\rho = 8.000 \text{ kg/m}^3$ . Die kinematischen Randbedingungen werden zunächst als Volleinspannung simuliert, eine Dämpfung wird vernachlässigt. In Bild 5.9 sind die Eigenmoden zu den ersten 6 Eigenkreisfrequenzen dargestellt.

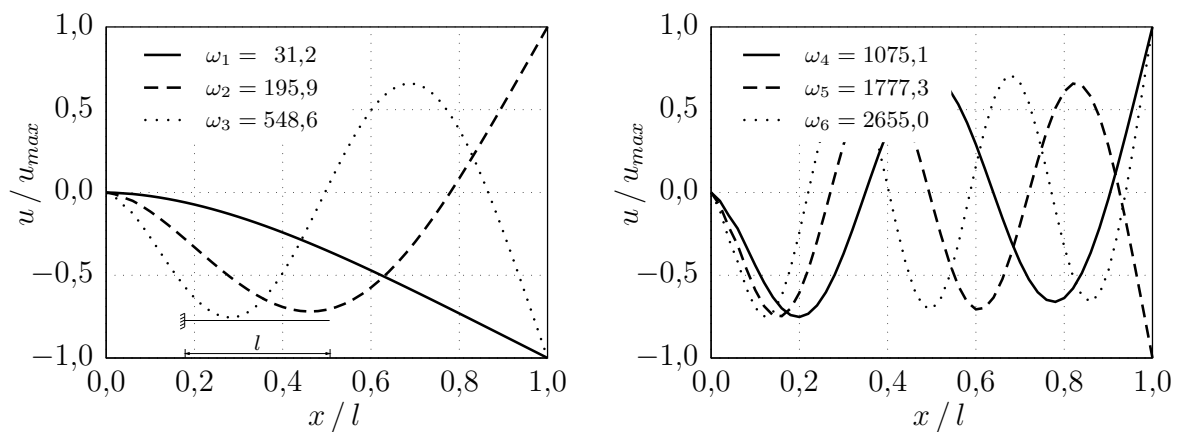


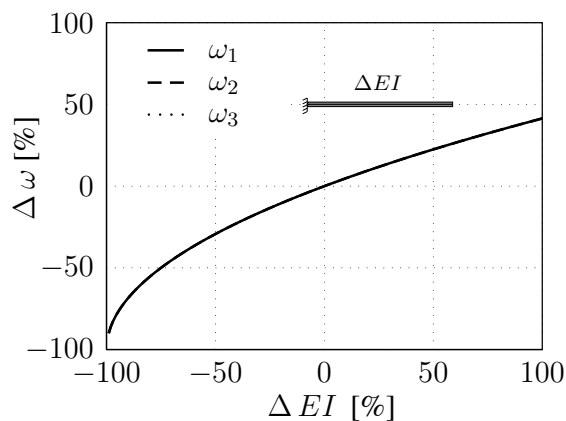
Bild 5.9: Eigenmoden 1 bis 6 des Referenzmodells

Als Maß für die Sensitivität der Eigenfrequenzen gegenüber Änderungen in den Systemparametern dienen die Differenzen der Eigenkreisfrequenzen

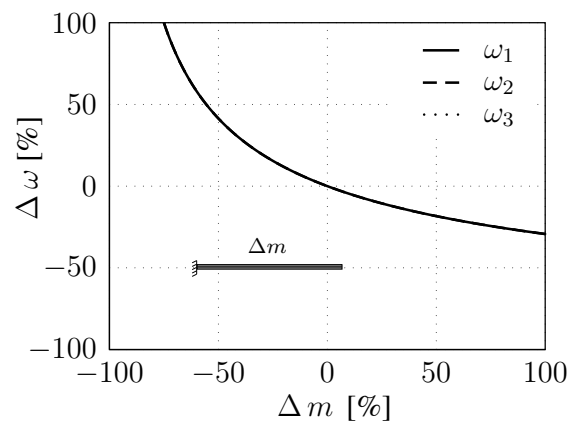
$$\Delta\omega = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \quad (5.48)$$

bezogen auf die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_0$  des Referenzmodells.

Zunächst wird der Fall untersucht, dass die Systemparameter auf ganzer Länge gleichmäßig von dem Referenzmodell abweichen. Die bezogenen Differenzen der ersten drei Eigenkreisfrequenzen sind in Bild 5.10a in Abhängigkeit von der Änderung der Biegesteifigkeit  $\Delta EI$  und in Bild 5.10b in Abhängigkeit von der Änderung der Masse  $\Delta m$  dargestellt. Es wird deutlich, dass die bezogenen Differenzen unabhängig von der Steifigkeit für alle Eigenkreisfrequenzen gleich sind. Für die Systemidentifikation ist der Umkehrschluss von Interesse: Sind die bezogenen Differenzen zwischen gemessenen und berechneten Eigenkreisfrequenzen für alle Frequenzen gleich, dann sind die Systemparameter global für das gesamte Berechnungsmodell zu korrigieren, eine lokale Störung kann ausgeschlossen werden.



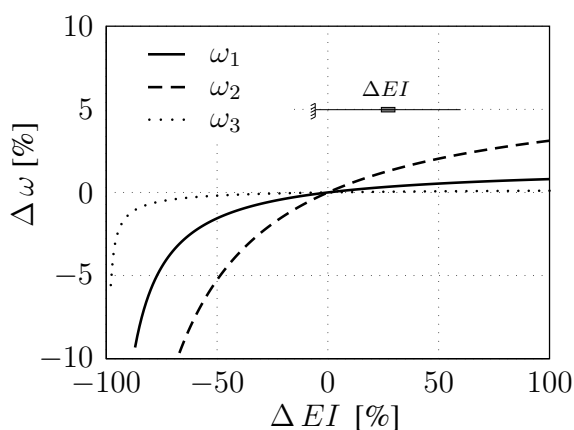
a) Variation der Steifigkeit



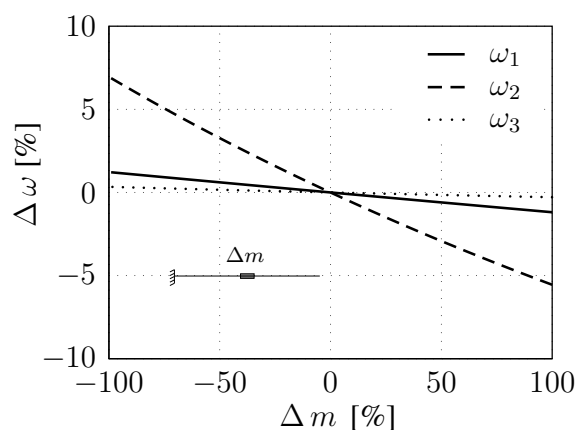
b) Variation der Masse

Bild 5.10: Variation der Systemparameter im Bereich des gesamten Kragarms

Lokale Änderungen in den Systemparametern wirken sich auf jede Eigenkreisfrequenz unterschiedlich aus. Die Bilder 5.11 zeigen die bezogenen Differenzen der Eigenkreisfrequenzen für den Fall, dass die Systemparameter nur in einem 10 cm langen Teilbereich in Balkenmitte variieren. Der Einfluss der Steifigkeit auf die Eigenkreisfrequenzen korreliert mit der Verkrümmung des konjugierten Eigenmodes im Bereich der Zustandsänderung. Diese ist für den Eigenmode 2 maximal und für Eigenmode 3 nahezu null. Für sehr kleine Biegesteifigkeiten im mittleren Teilbereich wird das System nahezu kinematisch und ist nicht mehr mit der Referenzlösung vergleichbar. Der Einfluss der Masse auf die Eigenkreisfrequenzen korreliert mit der Auslenkung des konjugierten Eigenmodes im Bereich der Zustandsänderung. Diese ist ebenfalls für den Eigenmode 2 maximal und für Eigenmode 3 nahezu null.



a) Variation der Steifigkeit



b) Variation der Masse

Bild 5.11: Variation der Systemparameter in einem 10 cm langen Bereich in Kragarmmitte

Der Einfluss der Ausdehnung  $\Delta l$  des Bereiches mit veränderten Systemparametern wird in den Bildern 5.12 untersucht. In dem mittig gelegenen Bereich der Länge  $\Delta l$  sind die Systemparameter um 50 % erhöht. Für  $\Delta l = l$  sind die bezogenen Differenzen  $\Delta\omega$  für alle Eigenkreisfrequenzen gleich, für  $\Delta l < l$  variiert der Einfluss auf die Eigenkreisfrequenzen und für sehr kleine Bereiche  $\Delta l \ll l$  ist kaum noch ein Einfluss auf die Eigenkreisfrequenzen zu erkennen. Die Identifikation kleiner Fehlstellen allein über die Eigenkreisfrequenzen ist daher begrenzt.

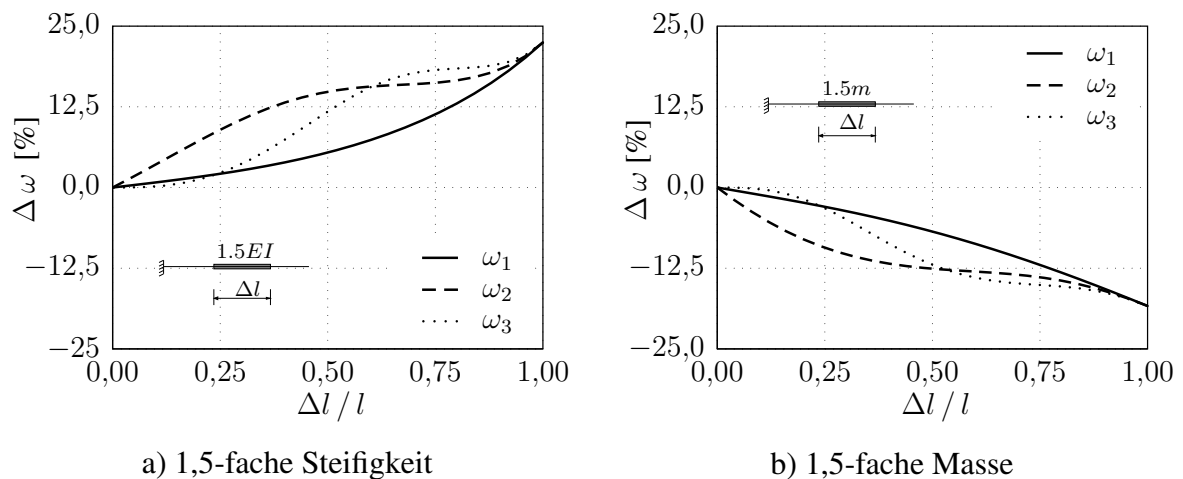


Bild 5.12: Variation der Systemparameter im Bereich  $\Delta l$

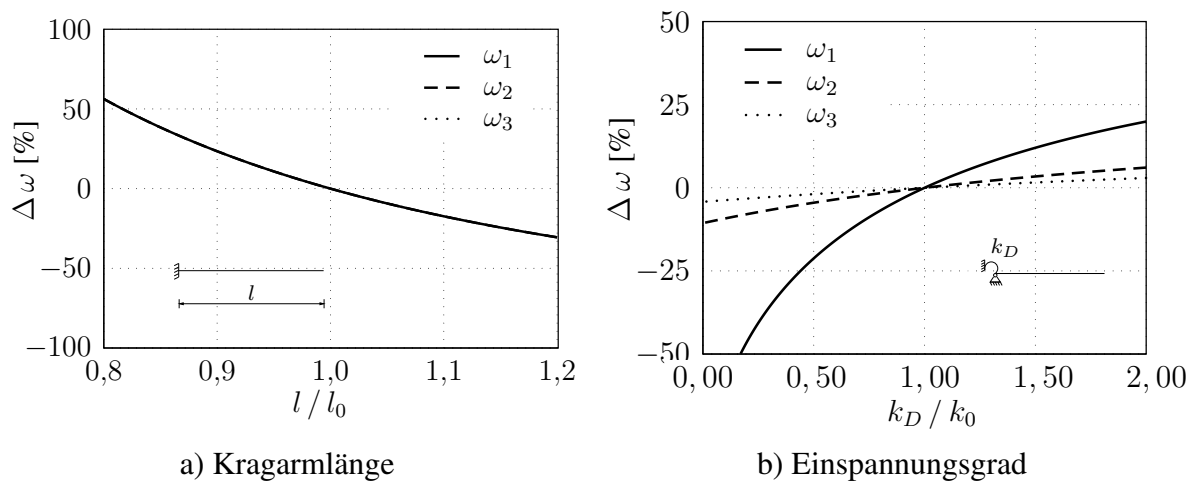


Bild 5.13: Variation der Systemparameter

Neben der Steifigkeits- und Massenverteilung sind die Systemabmessungen und die Randbedingungen entscheidend für das Systemverhalten. Die Kragarmlänge ist ein globaler Parameter und wirkt sich auf alle Frequenzen gleich aus, siehe Bild 5.13a. Im Rahmen der Systemidentifikation spielt die Ermittlung von Systemabmessungen

in der Regel eine untergeordnete Rolle, da die Abmessungen direkt und sehr genau messbar sind. Die Bestimmung der Randbedingungen ist von größerem Interesse, da die zur Modellbildung erforderlichen Federsteifigkeiten nicht direkt messbar sind. Randfedersteifigkeiten wirken sich vor allem auf die unteren Eigenkreisfrequenzen aus. In Bild 5.13b sind die bezogenen Differenzen  $\Delta\omega$  in Abhängigkeit von der Drehfedersteifigkeit  $k_D$  dargestellt, mit der Referenzsteifigkeit  $k_0 = 1000 \text{ Nm/rad}$ .

Den Einfluss der Lage einer Zustandsänderung auf die Eigenkreisfrequenzen ist mit Hilfe von Einflusslinien darstellbar. Die Einflusslinien (EL) in Bild 5.14a/b beschreiben die Auswirkung einer Veränderung der Steifigkeit bzw. der Masse an der Stelle  $x$  auf die Eigenkreisfrequenzen. Der Einfluss korreliert wiederum mit der Verkrümmung bzw. der Auslenkung der zugehörigen Eigenmoden an der Stelle  $x$ . Im Zuge der Parameterkorrektur sind die Einflusslinien als Wichtungsfunktionen verwendbar, um einzelne Bereiche im Tragwerk besonders hervorzuheben.

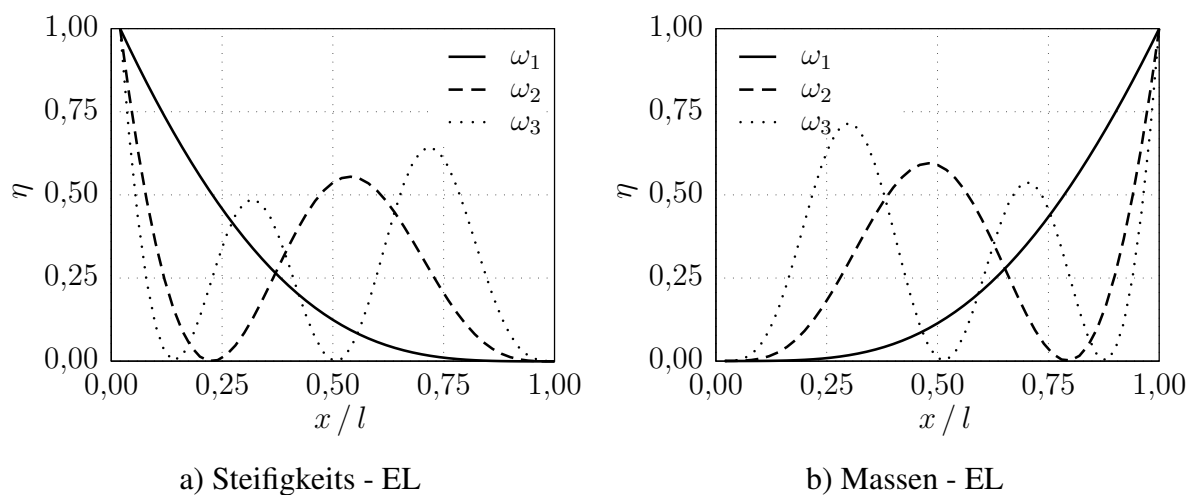
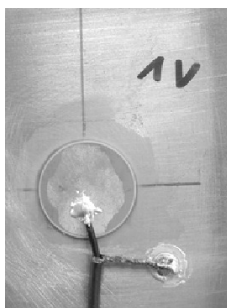


Bild 5.14: Einflusslinien für lokale Zustandsänderungen

Mit den einführenden Untersuchungen wird deutlich, dass sich globale Änderungen in den Systemparametern auf alle Eigenkreisfrequenzen gleichermaßen auswirken. Lage, Intensität und Ausdehnung einer lokalen Zustandsänderung wirken sich dagegen auf jede einzelne Eigenkreisfrequenz unterschiedlich aus. Eigenkreisfrequenz und Eigenmode sind globale Größen, die Energie verteilt sich gleichmäßig über das gesamte System. Eine kleine, lokale Zustandsänderung hat daher kaum Einfluss auf die modalen Größen, während Randbedingungen großen Einfluss, insbesondere auf die unteren Eigenkreisfrequenzen, haben.

## 5.4 Experimentelle Untersuchungen

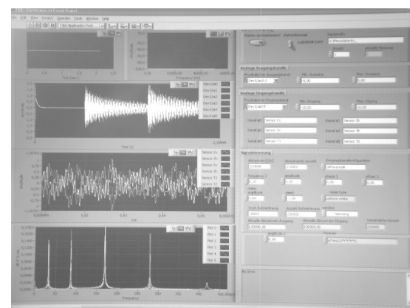
Die experimentelle Validierung der vorgestellten Methoden erfolgt anhand eines Stahlblechs mit wechselnden kinematischen Randbedingungen. Für die Anregung und die Messung der Systemantwort stehen Piezokeramiken vom Typ PIC255 der Firma *PI Ceramic* zur Verfügung, siehe Bild 5.15a. Die Generierung der Anregungssignale sowie die Aufnahme der Antwortsignale erfolgt mit dem in Bild 5.15b abgebildeten A/D-Wandler vom Typ *NI USB 6251*, die Auswertung der Signale erfolgt mit der Messsoftware *LabView* sowie *Matlab*.



a) Piezokeramik



b) NI USB 6251



c) LabView

Bild 5.15: Messtechnik

### 5.4.1 Frei hängendes Stahlblech

Das in Bild 5.16 abgebildete Blech ist in den Eckpunkten an langen Schnüren aufgehängt, um den Einfluss der Randbedingungen so gering wie möglich zu halten. Die Abmessungen des Bleches betragen  $l/b/h = 1,00/0,10/0,006$  m, dessen Gewicht 4,8 kg, was einer Rohdichte von  $\rho = 8.000 \text{ kg/m}^3$  entspricht.

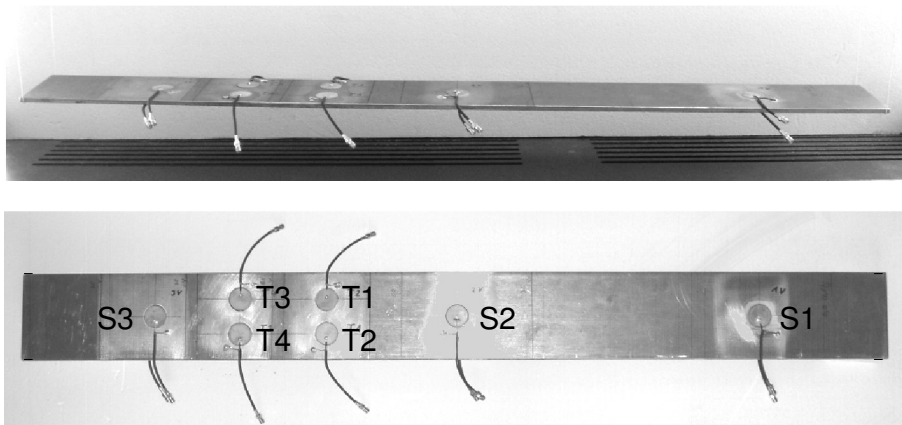
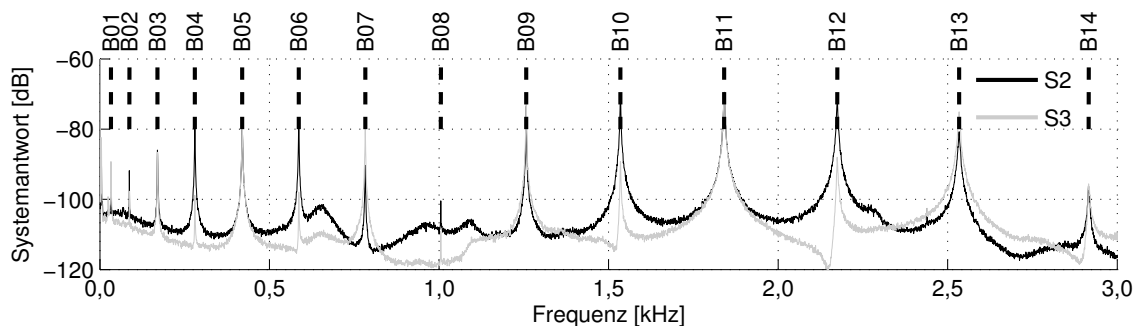


Bild 5.16: Frei hängendes Stahlblech, Ansicht und Sensoranordnung

Die Anordnung der Piezokeramiken ist Bild 5.16 zu entnehmen, sie sind jeweils beidseitig auf das Blech aufgeklebt. Als Klebstoff wird zweikomponentiger Epoxidharzklebstoff verwendet. Ein weißes Rauschen mit einer Amplitude von  $\pm 1$  V wird an einem Aktuatorpaar angelegt und versetzt das Blech in Schwingung. Nach einer Einschwingzeit von 0,1 s wird die Systemantwort in Form eines elektrischen Signals an den übrigen Piezokeramiken gemessen. Es erfolgt die Aufzeichnung von 200.000 Samples (S) mit einer Abtastrate von 100.000 S/s.

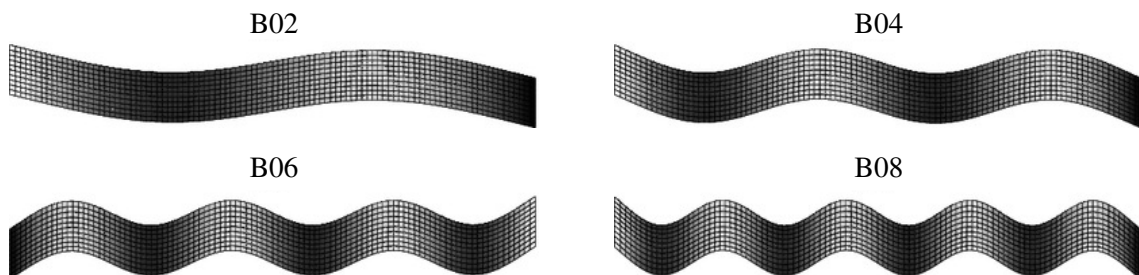
Bild 5.17 zeigt das Biegefrequenzspektrum. Die Biegeschwingungen werden vom Aktuatorpaar S1 erzeugt, indem die Aktuatoren auf Ober- und Unterseite um  $180^\circ$  phasenverschoben angeregt werden. Die Messung erfolgt in den Sensorpaaren S2 und S3. Störungen aus Membranschwingungen können beseitigt werden, indem die Signale des oberen und unteren Sensors voneinander subtrahiert werden. Die dargestellten Frequenzspektren sind jeweils über 100 Messungen gemittelt. Das Frequenzspektrum der Biegeschwingungen ist bis in einen Bereich von 3 kHz sehr klar, die Biegeeigenfrequenzen B01 - B14 sind deutlich identifizierbar. Die Eigenfrequenz B08 bildet die Ausnahme; der Vergleich mit dem zugehörigen Biegemode zeigt, dass alle Aktuatoren und Sensoren in Bereichen mit geringer Verkrümmung liegen.



a) Frequenzspektrum (gemessen)



b) Sensoransteuerung



c) ausgewählte Biegemoden (berechnet)

Bild 5.17: Biegeschwingung

Die Membranschwingungen werden ebenfalls in Aktuatorpaar S1 erzeugt, wobei die Aktuatoren auf Ober- und Unterseite jetzt in Phase angeregt werden. In dem Spektrum der Membranschwingungen in Bild 5.18 treten die Dehnstabeigenfrequenzen D01 - D08 hervor. Die übrigen Membraneigenfrequenzen (Biegung in der Ebene) sind mit der gewählten axialen Sensoranordnung nicht erfassbar. Aufgrund von Ungleichmäßigkeiten in Geometrie, Randbedingungen und Sensorpositionierung treten auch Biegeschwingungen auf, obwohl ausschließlich Membranschwingungen angeregt werden. Die Addition der Signale des oberen und unteren Aktuators vermindert diese Störungen aus Biegeschwingungen, kann sie letztlich aber nicht beseitigen. Der große Unterschied zwischen Biege- und Membransteifigkeit führt dazu, dass die Biegeschwingungen in den hochfrequenten Bereichen sogar dominieren.

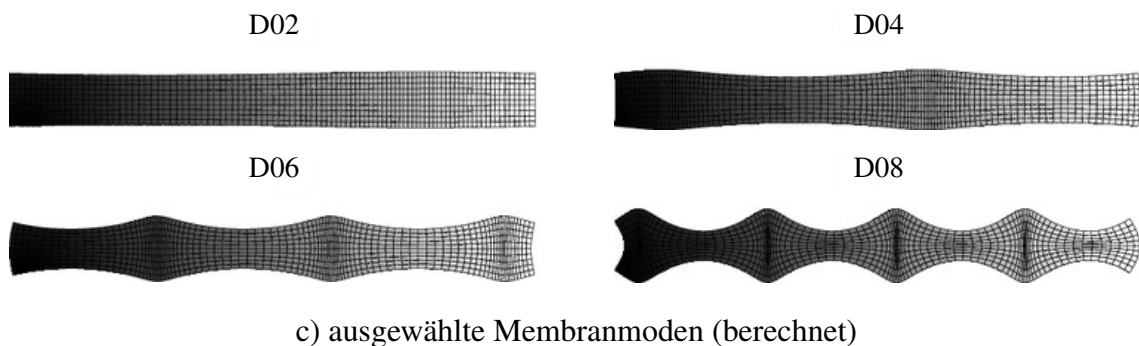
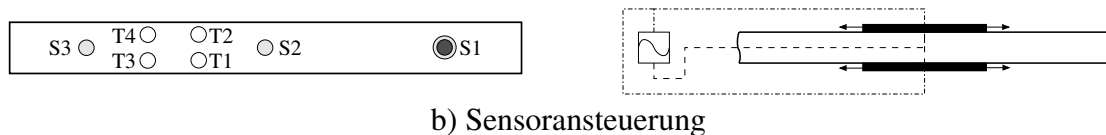
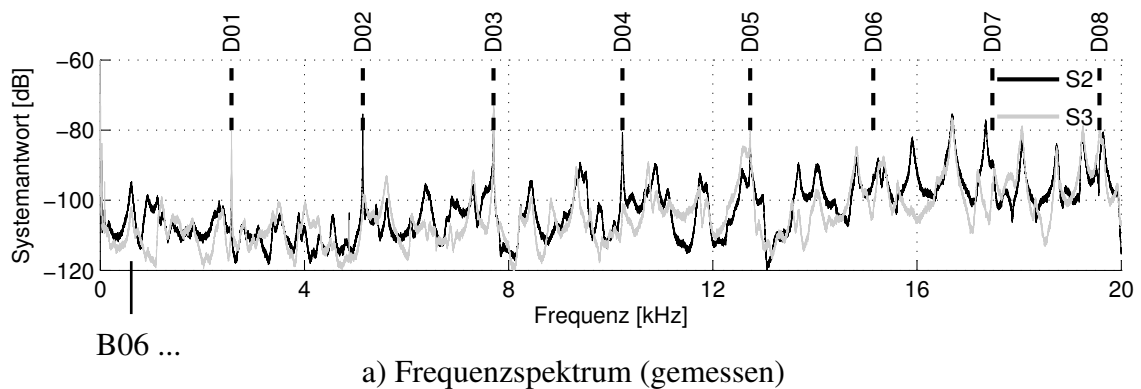
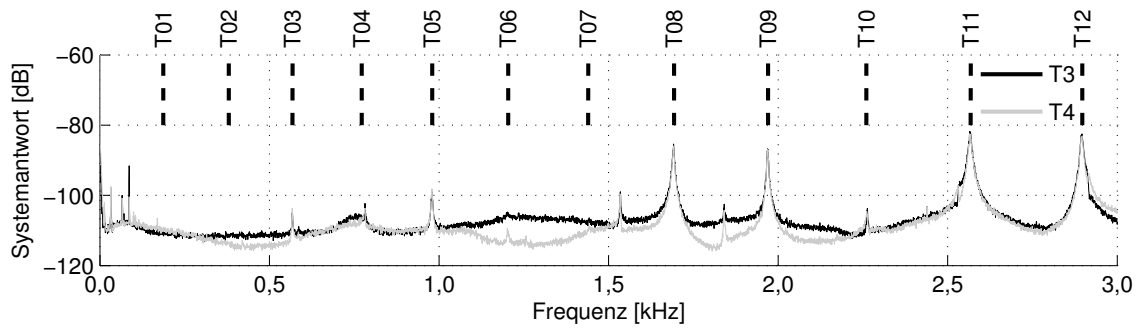
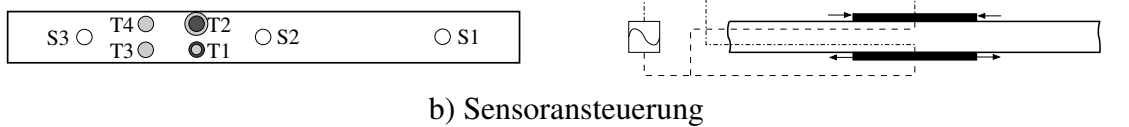


Bild 5.18: Membranschwingung

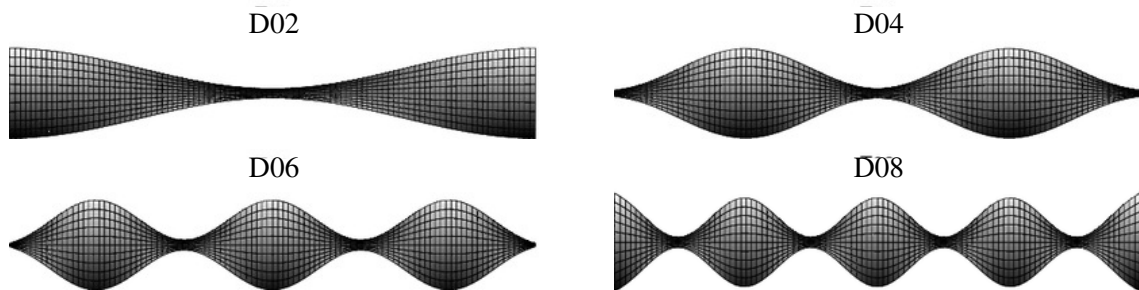
Die Anregung von Torsionsschwingungen erfolgt mit den Aktuatorpaaren T1/T2, die Messung der Systemantwort mit den Sensoren T3/T4. Die unteren Eigenfrequenzen im Spektrum der Torsionsschwingungen in Bild 5.19 sind wenig ausgeprägt, da die Sensorpositionen nicht optimal auf die entsprechenden Moden ausgelegt sind.



a) Frequenzspektrum (gemessen)



b) Sensoransteuerung



c) ausgewählte Torsionsmoden (berechnet)

Bild 5.19: Torsionsschwingung

Die ermittelten Eigenfrequenzen sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Sie dienen als Eingangswerte für die Parameterkorrektur mit dem Eigenfrequenzresiduum. Die Unbekannte der Korrektur ist zunächst der E-Modul  $E_s$  des Stahlblechs. Bild 5.20 vergleicht die Differenzen

$$\Delta\omega = \frac{\omega(\alpha) - \omega_m}{\omega_m} \quad (5.49)$$

zwischen den Eigenkreisfrequenzen  $\omega(\alpha)$  für verschiedene Modelle nach der Korrektur und den gemessenen Eigenkreisfrequenzen  $\omega_m$ .

Die Korrektur der ersten 6 Dehnstabeigenfrequenzen ergibt einen E-Modul von  $E = 206,28 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$  für das Dehnstabmodell und  $E = 212,13 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$  für das Scheibenmodell, bei einer vorgegebenen Querdehnzahl von  $\nu = 0,3$ . Die Abweichungen in den ersten 8 Dehnstabfrequenzen liegen für das Dehnstabmodell im Bereich kleiner 2% und für das Scheibenmodell sogar kleiner 2 ‰, siehe Bild 5.20a/b. Die Identifikation der Federsteifigkeit der Aufhängung ist mit keinem der beiden Modelle möglich.

Die Parameterkorrektur mit den Biegeeigenfrequenzen B01 - B10 liefert einen E-Modul von  $E = 208,56 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$  für das Balkenmodell und  $E = 203,47 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$



für das Plattenmodell. Die Federsteifigkeit  $k_F$  der Aufhängung sind so gewählt, dass die Differenz  $\Delta\omega_1$  in der ersten Eigenfrequenz verschwindet. Auch mit diesen beiden Modellen sind die Schwingungscharakteristiken des Stahlblechs gut beschreibbar, die Abweichungen sind kleiner 0,5%, vergleiche Bild 5.20c/d.

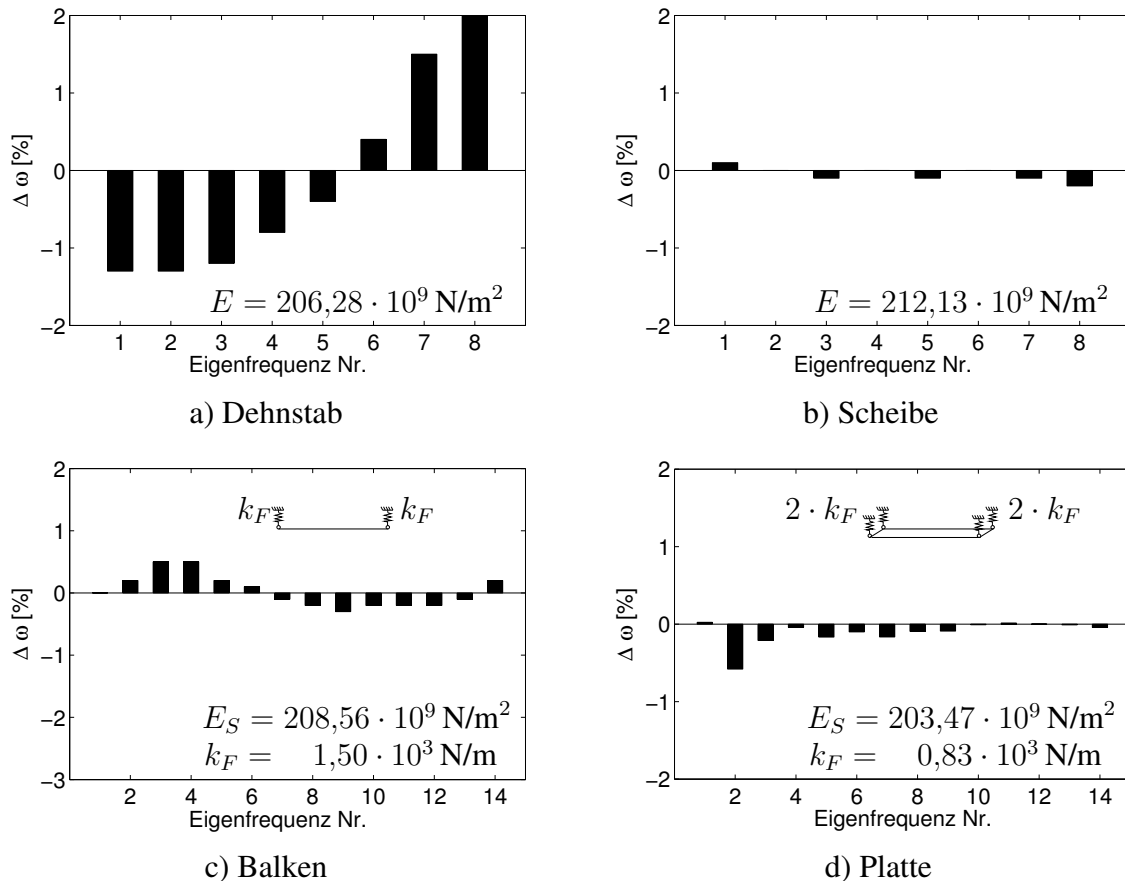


Bild 5.20: Vergleich verschiedener Korrekturmodelle

Die Genauigkeit des berechneten Schwingungsverhaltens eines Tragwerks nimmt mit steigender Frequenz ab. Vereinfachende Modellannahmen und numerisch bedingte Grenzen bei der Diskretisierung limitieren die Möglichkeiten der Berechnung. Das Eigenfrequenzresiduum wichtet bei der Korrektur der Steifigkeitsmatrix die höchste berücksichtigte Eigenkreisfrequenz stets am stärksten. Dies ist problematisch, wenn das verwendete Modell in diesem Frequenzbereich nicht mehr akkurat arbeitet.

Für die Parameterkorrektur mit der Übertragungsfunktion  $H(i\Omega)$  ist eine harmonische Anregung des Tragwerks erforderlich. Das Frequenzspektrum wird hierfür in 1 Hz-Schritten abgetastet. Bild 5.21 zeigt das gemessene Frequenzspektrum sowie die berechneten Frequenzspektren vor und nach der Korrektur. Das Referenzmo-

dell hat einen E-Modul von  $E = 210 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ . Die Korrektur der mit  $\times$  gekennzeichneten Frequenzen mit dem Ausgangsgrößenresiduum ergibt eine E-Modul von  $E = 202,1 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ . Im Gegensatz zur Korrektur mit dem Eigenfrequenzresiduum ist der piezoelektrische Effekt implizit in der Korrektur mit dem Ausgangsgrößenresiduum berücksichtigt. Differenzen in der Amplitude zwischen dem gemessenen Spektrum und dem Spektrum des korrigierten Modells sind durch Unsicherheiten bei der Modellierung der piezokeramischen Aktuatoren bedingt: Die piezoelektrischen Materialparameter weisen eine gewisse Streuung auf, die Klebschicht wird vernachlässigt und elektrische Verluste werden nicht berücksichtigt.

Der in diesem Versuch ermittelte E-Modul streut in Abhängigkeit vom verwendeten Modell, den Randbedingungen und den berücksichtigten Eigenfrequenzen um bis zu 5 %. Dennoch bilden alle Modelle die Systemeigenschaften sehr gut ab, die Differenzen  $\Delta\omega$  sind kleiner 2 %. Für eine realistische Abschätzung der Systemparameter und der Modellfehler ist es erforderlich, die Optimierung mit unterschiedlichen Modellen, Randbedingungen und Eigenfrequenzen durchzuführen.

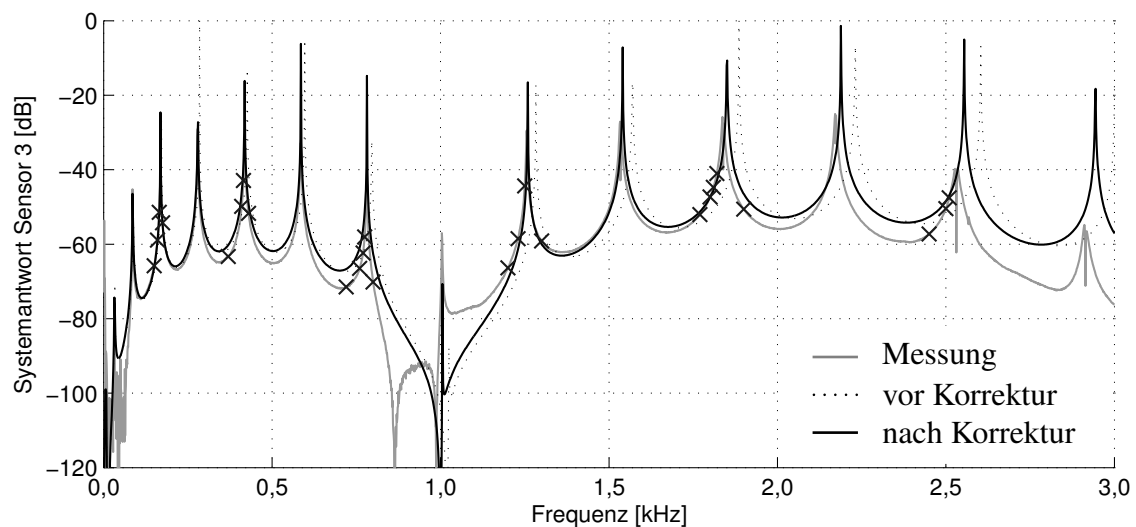


Bild 5.21: Korrektur über die Übertragungsfunktion

EW	Messung	Balken	Platte	EW	Messung	Dehnstab	Scheibe
B01	32,5	32,5	32,5	M01	512,8		511,7
B02	87,0	87,2	86,5	M02	1.336,3		1.332,9
B03	169,5	170,4	169,2	M03	2.439,5		2.435,3
T01	187,0		188,5	D01	2.571,5	2.538,8	2.574,8
B04	280,0	281,4	280,1	M04	—		3.722,6
T02	380,0		379,3	M05	—		5.128,7
B05	419,5	420,3	419,4	D02	5.142,5	5.077,1	5.143,7
T03	568,0		575,8	M06	—		6.607,7
B06	586,5	587,0	587,3	D03	7.704,0	7.614,0	7.699,3
T04	772,0		780,4	M07	—		8.128,5
B07	782,5	781,4	783,9	M08	—		9.669,2
T05	980,0		995,7	D04	10.230,0	10.149,1	10.231,5
B08	1.005,5	1.003,7	1.009,1	M09	—		11.212,3
T06	1.204,0		1.223,7	D05	12.732,0	12.681,7	12.724,0
B09	1.257,0	1.253,7	1.262,9	M10	—		12.739,6
T07	1.440,0		1.466,5	M11	—		14.222,7
B10	1.535,0	1.531,6	1.545,4	D06	15.144,0	15.211,1	15.148,4
T08	1.693,0		1.726,0	M12	—		15.566,7
B11	1.841,0	1.837,2	1.856,5	M13	—		16.287,9
T09	1.970,5		2.004,0	M14	—		16.529,0
B12	2.174,5	2.170,6	2.195,7	D07	17.475,0	17.736,8	17.451,8
T10	2.260,0		2.301,9	M15	—		17.454,3
B13	2.534,0	2.531,8	2.562,5	M16	—		17.624,9
T11	2.568,0		2.621,0	M17	—		18.961,7
T12	2.897,0		2.952,8	M18	—		18.963,8
B14	2.916,0	2.920,8	2.962,7	D08	19.575,0	20.258,2	19.538,2
B	Biegung			M	Membran		
T	Torsion			D	Dehnung		

Tabelle 5.1: Eigenfrequenzen des frei hängenden Stahlblechs in Hz

### 5.4.2 Kragarm

Das Stahlblech aus dem vorherigen Versuch ist nun 0,065 m tief in einen Schraubstock eingespannt, der wiederum mit Schraubzwingen am Tisch befestigt ist, siehe Bild 5.22a. Mit einem Ausschwingversuch kann das logarithmische Dekrement zu  $\Lambda = 0,04$  und der Dämpfungsgrad zu  $\zeta = 0,0064$  bestimmt werden. Die getroffene Annahme einer sehr schwachen Dämpfung trifft also zu, weshalb die Dämpfung im Rahmen der Systemidentifikation weiterhin vernachlässigt wird.

Als Korrekturmodell dient ein Balkenmodell, bestehend aus 100 Elementen. Masse und Abmessungen des Balkens sind hinreichend genau bekannt. Gesucht sind die Steifigkeit des Balkens sowie die bestmögliche Modellierung der Randbedingungen. In den unteren Eigenfrequenzen ist ein Mitschwingen des Tisches deutlich spürbar. Die Modellierung als feste Einspannung ist daher fehlerhaft. In Bild 5.22b sind die gemessenen und berechneten Eigenfrequenzen für zwei Lagerungsarten angegeben.

Für die Identifikation ist es naheliegend, von dem in Bild 5.23a dargestellten Modell auszugehen. System I modelliert die Einspannung nachgiebig mit einer Drehfeder. Die Korrektur erfolgt mit dem Eigenfrequenzresiduum unter Berücksichtigung der ersten 7 Eigenfrequenzen und ergibt einen E-Modul von  $E = 179 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$  und eine Drehfedersteifigkeit von  $k_D = 56.500 \text{ Nm/rad}$ . Der ermittelte E-Modul ist offensichtlich zu niedrig und die korrigierten Eigenfrequenzen weichen erheblich von den gemessenen Eigenfrequenzen ab. Dieses Modell ist daher nicht geeignet, das Schwingungsverhalten des Kragarms richtig abzubilden.



a) Ansicht

Nr.	Messung	System I	System II
1	4,9	5,2	4,88
2	31,5	32,5	31,44
3	90,0	91,0	89,51
4	177,0	178,3	177,30
5	295,0	294,8	294,88
6	441,5	440,5	441,52
7	616,0	615,3	616,00
8	819,0	819,3	816,53
9	1045,5	1052,6	1041,11
10	1291,0	1315,1	1288,66

b) Eigenfrequenzen  $f_1 - f_{10}$  [Hz]

Bild 5.22: Kragarm

System II berücksichtigt eine zusätzliche Dehnfeder, siehe Bild 5.23b. Hier ergibt die Korrektur einen realistischen E-Modul von  $E = 206 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ , eine Drehfedersteifigkeit von  $k_D = 4.820 \text{ Nm/rad}$  und eine Dehnfedersteifigkeit von  $k_F = 10,4 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ . Dieses Modell bildet auch die unteren Eigenfrequenzen sehr gut ab, die bezogenen Differenzen sinken gegenüber System I von knapp 6 % auf unter 0,5 %.

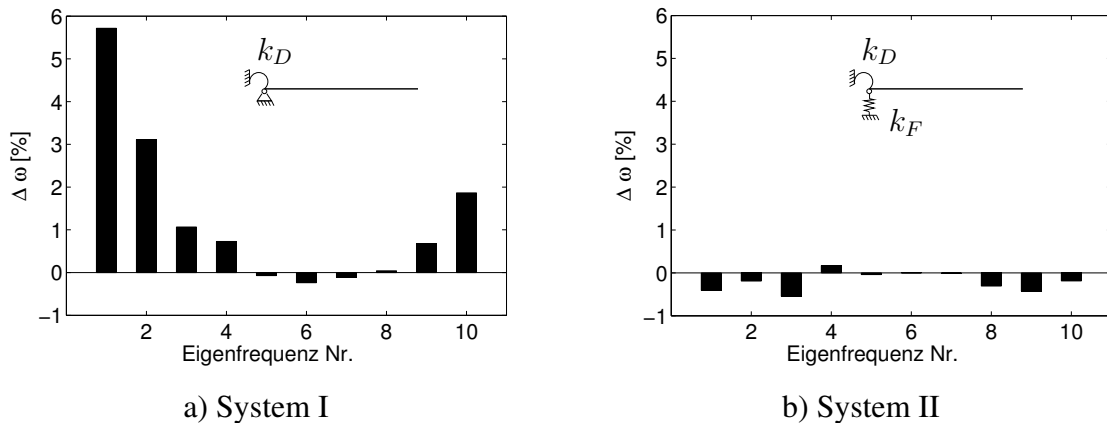


Bild 5.23: Zwei Korrekturmodelle zur Erfassung der Randbedingungen

Das Experiment zeigt die Bedeutung eines zuverlässiges Korrekturmodells. Für beide Modelle wird zwar eine optimale Lösung gefunden, das wirkliche Schwingungsverhalten ist aber nur mit System II erfassbar.

## 5.5 Zusammenfassende Bewertung

Voraussetzung für eine erfolgreiche Identifikation physikalischer Parameter ist ein adäquates mathematisches Modell mit dem das reale Schwingungsverhalten abbildbar ist. Desweiteren ist die Wahl geeigneter Substrukturen und Korrekturparameter entscheidend für die Qualität der Identifikation. Hier gibt eine Sensitivitätsanalyse Aufschluss, welche Parameter das Tragverhalten prägen.

Die Versuchsauslegung ist eng mit der Wahl des Korrekturmodells verknüpft. Die Lastangriffspunkte und die Messstellen sind so anzuordnen, dass alle interessierenden Frequenzen erfassbar sind und alle zu den Substrukturen konjugierten Freiheitsgrade angesprochen werden. Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, müssen mindestens so viele Messstellen vorhanden sein, wie Korrekturparameter gesucht sind.

Im Rahmen der Systemidentifikation gibt es eine Vielzahl möglicher Fehlerquellen. Modellfehler entstehen, wenn das verwendete Modell das wirkliche Systemverhalten nicht richtig abbildet. Dies ist z. B. der Fall, wenn physikalische oder geometrische Nichtlinearitäten das Systemverhalten dominieren, Randbedingungen falsch modelliert sind oder eine ungeeignete Diskretisierung gewählt ist. Desweiteren sind

Umwelteinflüsse zu beachten. So hat die Temperatur Einfluss auf das Schwingungsverhalten, wenn sich die Randbedingungen oder die Materialfestigkeiten ändern (Zwang, Erwärmung der Asphaltdecke einer Straßenbrücke, ...). Darüber hinaus kann die Messtechnik Fehlfunktionen aufweisen, die sich auf die gemessenen Spektren auswirken. Alle systematischen Fehler haben gemein, dass sie in der Regel nur durch den Nutzer erkannt und behoben werden können.

Zufällige Fehler sind dagegen mit den vorgestellten Parameterschätzverfahren anhand mehrerer unabhängiger Versuche bestimmbar. Während die Fehlerquadratmethode nur bei normalverteilten Messfehlern optimal arbeitet, sind mit der Maximum-Likelihood-Methode auch andere Verteilungen beschreibbar. Mit der Bayes-Schätzung ist es zudem möglich, a priori Wissen über das Tragwerk zu berücksichtigen. Die Korrektur der Übertragungsfunktion liefert ähnliche Ergebnisse wie die Korrektur der Eigenfrequenzen. Bei der Korrektur der Übertragungsfunktion stehen zwar wesentlich mehr Messwerte zur Verfügung, der Informationsgehalt ist jedoch nicht höher.

Die Lösung des inversen Problems erfordert in der Regel die Lösung eines überbestimmten Gleichungssystems, wenn mehr Messwerte als Korrekturparameter vorhanden sind. Dies führt bei Verwendung der vorgestellten Parameterschätzverfahren zu schlecht konditionierten Systemmatrizen, weshalb eine Stabilisierung der Berechnung erforderlich ist. Alternativ zu der Regularisierung der Residuen nach Tikhonov oder Bayes kann das überbestimmte Gleichungssystem auch direkt mit einer QR-Zerlegung gelöst werden.

## 6. Bauwerksmonitoring und Zustandsanalyse

Das Flussdiagramm in Bild 6.1 stellt das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Monitoringkonzept vor. Erster Schritt ist die Zustandsaufnahme mit Hilfe der im vorherigen Kapitel dargelegten Methoden der Systemidentifikation. Der IST-Zustand ist als Referenzlösung definiert und liegt für spätere Untersuchungen als FE-Modell vor.

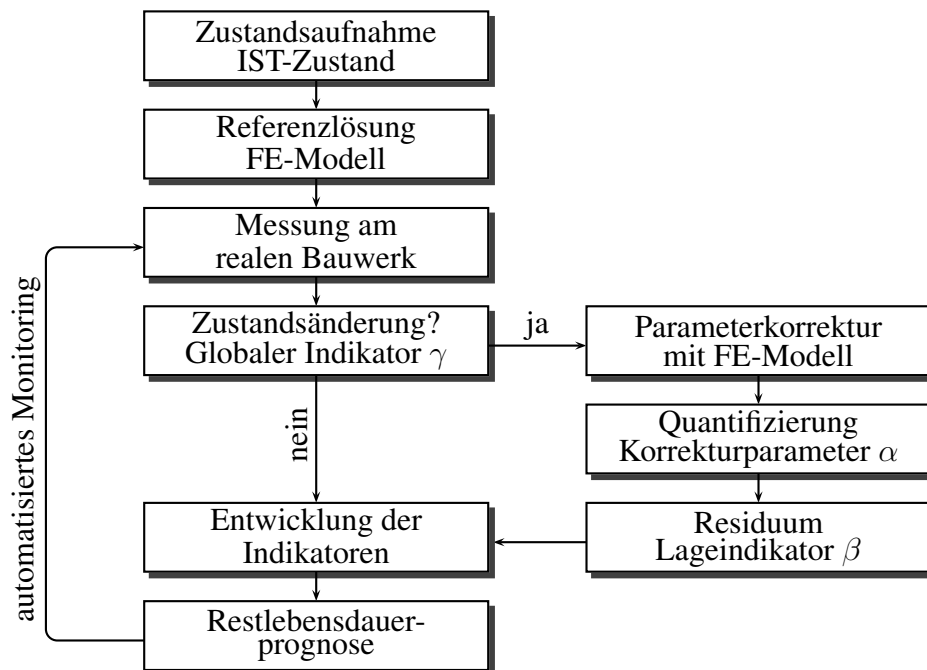


Bild 6.1: Flussdiagramm Monitoringkonzept

Im Laufe des in der Zeit automatisch ablaufenden Monitorings erfolgt die Systemanregung und Messung der Systemantwort in regelmäßigen Abständen. Mit den gemessenen Größen und dem FE-Modell ist eine Parameterkorrektur möglich. Der Schadensindikator  $\gamma$  signalisiert eine Zustandsänderung im Laufe des Monitorings, wenn das Frequenzspektrum der aktuellen Messung signifikant von der Referenzlösung abweicht. In diesem Fall wird die Referenzlösung mit Hilfe der Parameterkorrektur an die aktuellen Messergebnisse angepasst.

Für die Identifikation von Zustandsänderungen stehen zwei Zustandsindikatoren zur Verfügung. Mit dem Korrekturparameter  $\alpha$ , der die Änderung der gewählten physikalischen Variablen beschreibt, wird die Zustandsänderung quantifiziert. Um bei geometrisch und statisch komplexen Tragwerken auf den Ort der Zustandsänderung schließen zu können, wird der Lageindikator  $\beta$  definiert, der die Residuen der Parameterkorrektur verwendet. In Einzelfällen ist es möglich, aus der zeitlichen Entwicklung der Korrekturparameter auf die Restlebensdauer des Bauwerks zu schließen.

## 6.1 Globaler Zustandsindikator

In Bild 6.2b ist ein Zweifeldträger dargestellt, der in der Mitte des linken Feldes eine Schädigung S1 aufweist. Im Rahmen des Monitorings sollen am Bauwerk automatisiert Messungen durchgeführt werden. Nach Anregung des Tragwerks erfolgt die Messung der Systemantwort. Die Art der Anregung und der verwendeten Messtechnik sind dabei zunächst beliebig.

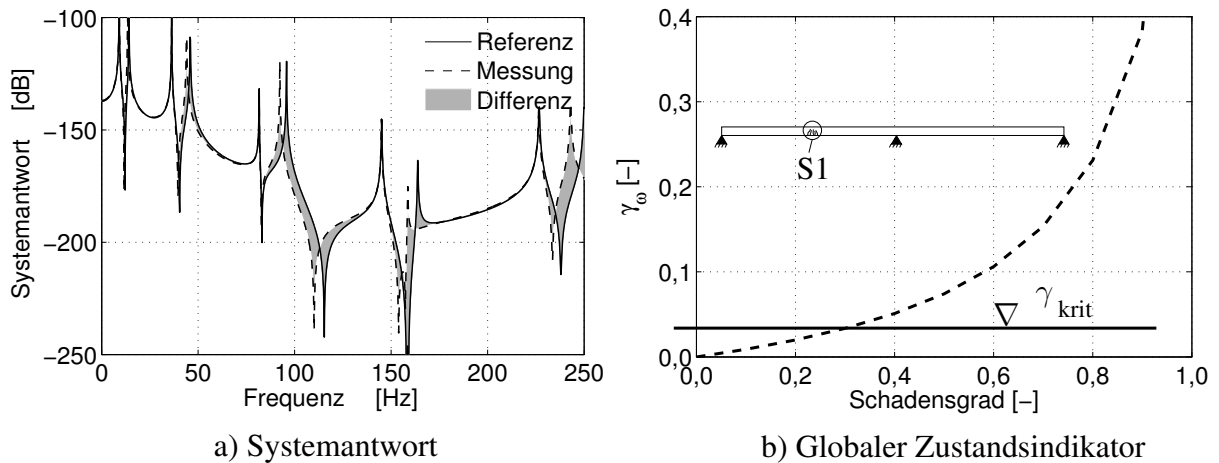


Bild 6.2: Einfluss einer Schädigung auf das Frequenzspektrum

Die Systemantwort  $F(\Omega)$  wird in einem Frequenzintervall  $I \in [\Omega_1, \Omega_2]$  abgetastet und mit der Referenzlösung  $F_0(\Omega)$  verglichen. Im Falle einer Zustandsänderung sind Änderungen im Frequenzspektrum zu erkennen, siehe Bild 6.2a. Der globale Zustandsindikator  $\gamma$  ist mit der über das gemessene Frequenzintervall aufintegrierten „vertikalen“ Differenz  $\Delta F(\Omega) = |F(\Omega) - F_0(\Omega)|$  gegeben,

$$\gamma_{\Omega} = \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \Delta F(\Omega)^2 d\Omega . \quad (6.1)$$

Falls nicht das gesamte Frequenzspektrum, sondern nur die Eigenfrequenzen bekannt sind, ist alternativ die Summe der „horizontalen“ Differenzen der  $N$  gemessenen



Eigenfrequenzen zu verwenden,

$$\gamma_{\omega} = \sum_{n=1}^N \left| \frac{\omega_n - \omega_{0n}}{\omega_{0n}} \right|^2. \quad (6.2)$$

Bild 6.2b zeigt beispielhaft die Entwicklung des globalen Zustandsindikators  $\gamma_{\omega}$  infolge der Schädigungen S1 in Abhängigkeit vom Schädigungsgrad. Überschreitet der Zustandsindikator eine Toleranzschranke  $\gamma \geq \gamma_{krit}$  ist von einer signifikanten Zustandsänderung im Tragwerk auszugehen. Die Toleranzschranke  $\gamma_{krit}$  dient der Ausschaltung von Messungenauigkeiten und ist für jedes Bauteil bzw. Tragwerk individuell festzulegen.

## 6.2 Lokale Zustandsindikatoren

Eine Zustandsänderung kann vielfältige Ursachen haben wie z. B. lokale Materialschädigung (Risse), globale Materialschädigung (Korrosion), veränderte Randbedingungen (gelöste Bolzen) oder Umweltbedingungen (Temperatur), wie auch Ertüchtigungen und Instandsetzungsmaßnahmen. Die Frage nach der Ursache zeigt ein Hauptproblem der Zustandsanalyse auf:

*Für die eindeutige Identifikation von Zustandsänderungen ist ein Modell erforderlich, von dem a priori nicht bekannt ist, wie es auszusehen hat.*

Entscheidend für die Qualität der Parameterkorrektur ist die Wahl der richtigen Substrukturen, denen jeweils ein Korrekturparameter  $\alpha$  zugeordnet ist. Im Rahmen der Systemidentifikation ist es sinnvoll, den Schwerpunkt auf die Ermittlung der Randbedingungen sowie die Bestimmung globaler physikalischer Parameter zu legen, siehe Abschnitt 5. Hierfür können große Bereiche des Tragwerks in wenigen Substrukturen zusammengefasst werden, die mit den Korrekturmatrizen verknüpft sind.

Für die Bestimmung lokaler Zustandsänderungen ist dieses Vorgehen nicht mehr anwendbar. Bild 6.3 zeigt den Versuch, die lokale Rissbildung im linken Feld des Zweifeldträgers zu identifizieren. Es erscheint sinnvoll, die einzelnen Substrukturen, die mit den Korrekturparametern  $\alpha$  verknüpft sind, zunächst grob zu wählen und das Substrukturnetz anschließend in Bereichen signifikanter Änderungen zu verfeinern. Wie in Bild 6.3a zu erkennen, ist es allerdings nicht möglich, die Charakteristik der Schädigung mit einer gröberen Diskretisierung richtig zu erfassen.

Auch die Einteilung in ein sehr feines Substrukturnetz wie es in Bild 6.3b eingesetzt ist, führt nicht zum Erfolg, wenn die Anzahl der Substrukturen und somit der Korrekturparameter die Anzahl der Messwerte übersteigt. Im besten Fall kommt es zu einem Verschmieren der Lösung, meistens wird jedoch keine Lösung gefunden. Für

die quantitative Bestimmung einer lokalen Zustandsänderung mit Hilfe der Parameterkorrektur muss der Ort der Zustandsänderung also praktisch schon bekannt sein. Dann kann die Korrektur mit wenigen Substrukturen erfolgen, von denen eine genau den Bereich der Zustandsänderung abdeckt.

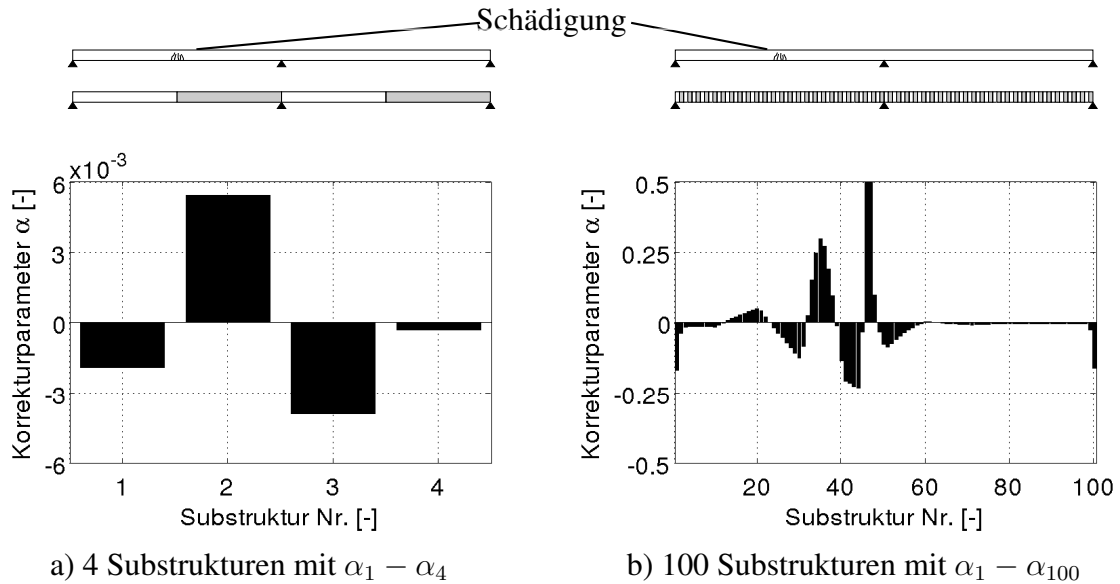


Bild 6.3: Korrektur für verschiedene Substrukturnetze

Das vorliegende Konzept koppelt daher die Parameterkorrektur mit einem Testverfahren, dessen Ablauf Bild 6.4 verdeutlicht. Das Tragwerk wird hierbei in  $N$  räumlich begrenzte Substrukturen unterteilt, die einem einzelnen Element oder einer kleinen Elementgruppe zugeordnet sind. Die Korrektur erfolgt nacheinander für jede einzelne Substruktur. Anstelle einer  $N$ -D Optimierungsaufgabe sind jetzt  $N$  1-D Optimierungsaufgaben zu lösen, die das gewählte Residuum minimieren. Für jede einzelne Substruktur erhält man einen optimalen Korrekturparameter  $\alpha_n$ . Solange sich die aktuell korrigierte Substruktur  $n$  nicht in der Nähe der Zustandsänderung befindet, verbleibt in der Regel ein Restfehler  $f_n$ . Der Lageindikator ist definiert als Fehlerquadrat des Restfehlers

$$\beta_n = \mathbf{f}_n^T \mathbf{f}_n \quad (6.3)$$

Die Projektion von Korrekturparameter und Lageindikator auf die Tragwerksachse ergibt die in Bild 6.4 dargestellten Indikatorlinien. Es bietet sich an, den Lageindikator auf den größten Wert zu normieren. Der Lageindikator  $\beta$  wird genau dann minimal, wenn die entsprechende Substruktur im Bereich der Zustandsänderung liegt. Ein globales Minimum des Lageindikators in  $x_{\min}$  gibt daher einen Hinweis auf den wahrscheinlichen Ort der Zustandsänderung. Mit dem zugehörigen Korrekturparameter  $\alpha_{x,\min}$  ist es möglich, die Zustandsänderung der Substruktur am Ort  $x_{\min}$  zu quantifizieren.

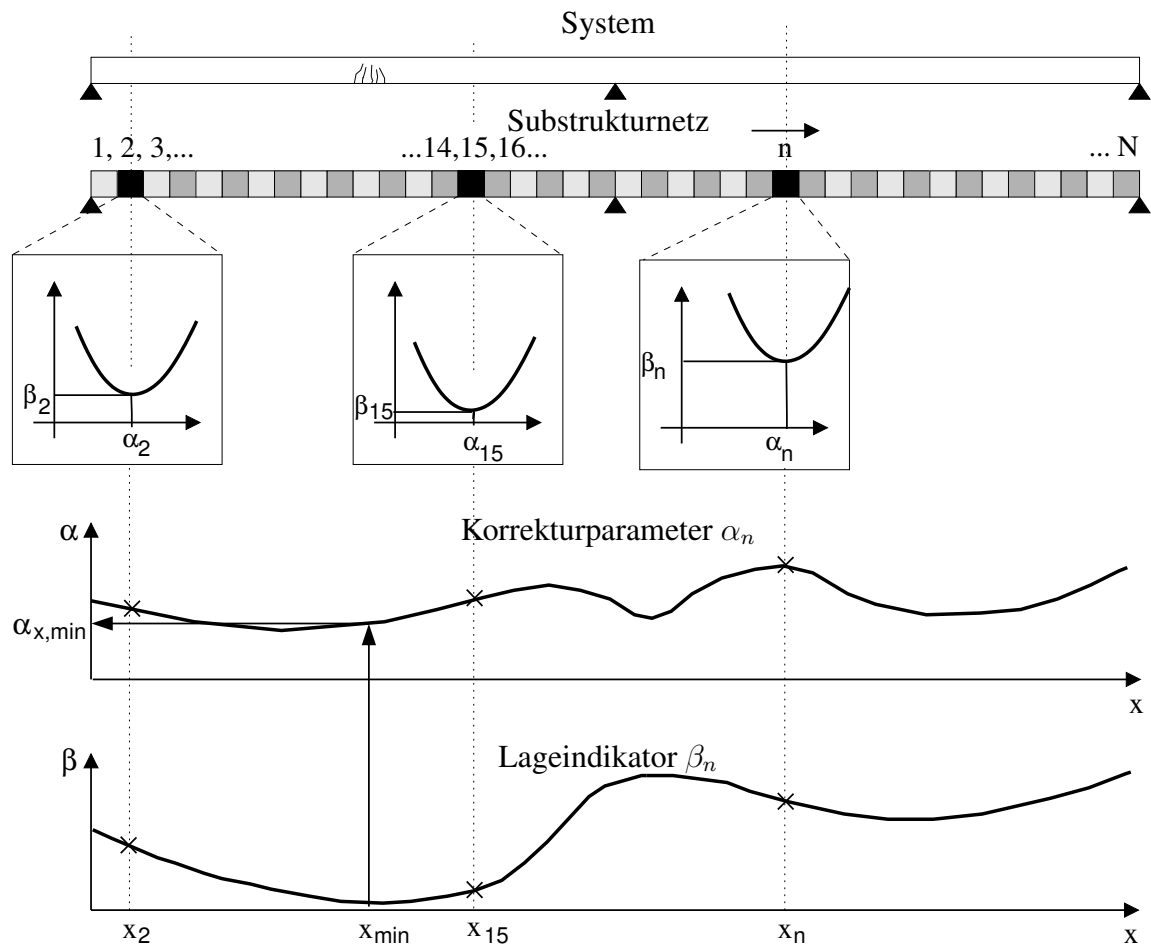


Bild 6.4: Parameterkorrektur gekoppelt mit Testverfahren

Eine exakte Quantifizierung über die Korrekturparameter ist nur dann möglich, wenn das Tragwerk an nur einer Stelle geschädigt ist und die verwendete Substruktur die räumliche Ausbreitung der Zustandsänderung exakt abdeckt. Desweiteren kann der Lageindikator mehrere lokale Minima aufweisen, von denen keines eindeutig als globales Minimum identifizierbar ist. Daher kann ein weiterer Berechnungsschritt erforderlich werden, bei dem alle Substrukturen wieder gleichzeitig zu korrigieren sind. Allerdings werden nur die Substrukturen berücksichtigt, die sich in der Nähe lokaler Minima des Lageindikators befinden. Der Lageindikator ist somit auch als Wichtigkeitsfaktor für weitere Untersuchungen zu verstehen.

## 6.3 Numerische Untersuchungen

Das Konzept der lokalen Zustandsindikatoren soll nachfolgend anhand eines 1-D Balkentragwerks und eines 2-D Rahmentragwerks diskutiert werden. Die Eigenschaften des Testverfahrens werden für unterschiedliche Schadensszenarien und Randbedingungen untersucht.

### 6.3.1 Zweifeldträger

An dem in Bild 6.5a dargestellten Zweifeldträger werden verschiedene Schadensszenarien untersucht. Eine Verringerung des E-Moduls in ausgewählten Elementen simuliert eine lokale Schädigung. Die Last  $P(t)$  in Mitte des linken Feldes regt das System harmonisch an, gemessen wird die vertikale Verschiebung in den mit  $\times$  gekennzeichneten Messstellen. Bild 6.5b zeigt das im Lastangriffspunkt gemessene Antwortspektrum. Die zu den gekennzeichneten Frequenzen gehörenden Schwingungsformen sind in Bild 6.5c zu sehen.

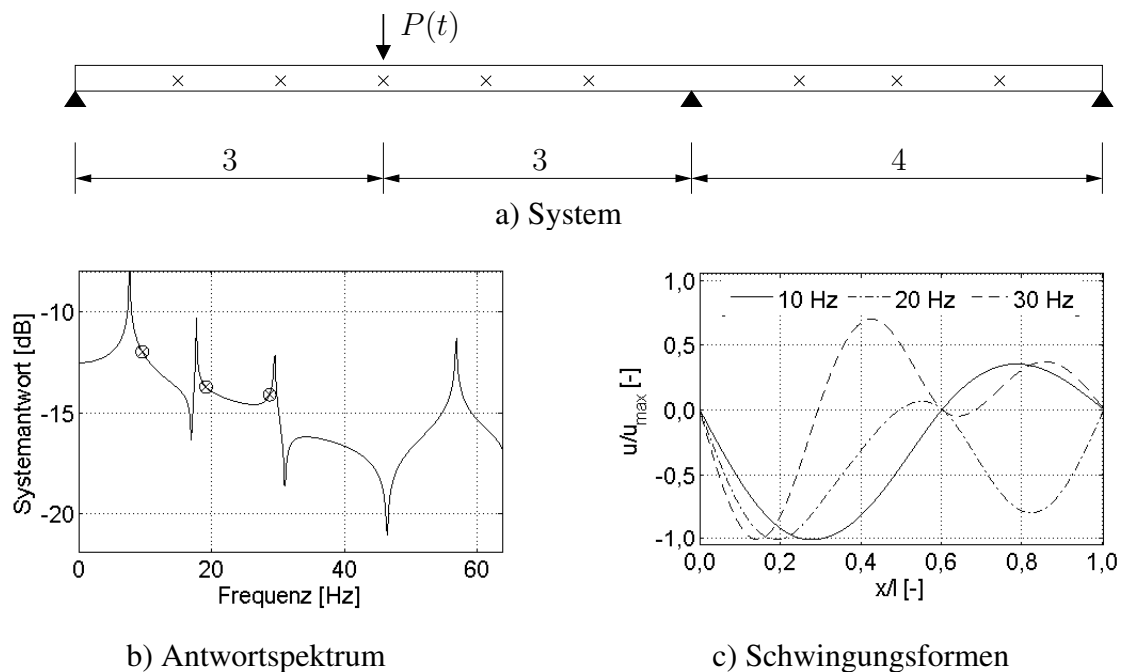


Bild 6.5: Zweifeldträger

Die Diskretisierung erfolgt mit 100 Bernoulli-Balkenelementen. Für die Korrektur der Biegesteifigkeit  $EI$  mit dem Ausgangsgrößenresiduum ist ebenfalls eine Aufteilung in 100 Substrukturen gewählt. Zunächst ist die Schädigung auf ein Element begrenzt, dessen E-Modul um 25% reduziert ist. Bild 6.6 zeigt die Zustandsindikatoren für verschiedene Frequenzintervalle. Je größer der für die Korrektur verwendete Frequenzbereich ist, desto ausgeprägter tritt das globale Minimum im Bereich der Schädigung zutage. Allerdings treten weitere, lokale Minima auf und der numerische Aufwand der Korrektur steigt mit der Anzahl der verwendeten Frequenzen an. Für den hier betrachteten Fall der räumlichen Übereinstimmung des geschädigten Elementes mit der Substruktur  $i = 25$  gibt der zum globalen Minimum gehörende Korrekturparameter die Reduzierung des E-Moduls exakt mit 25% an.

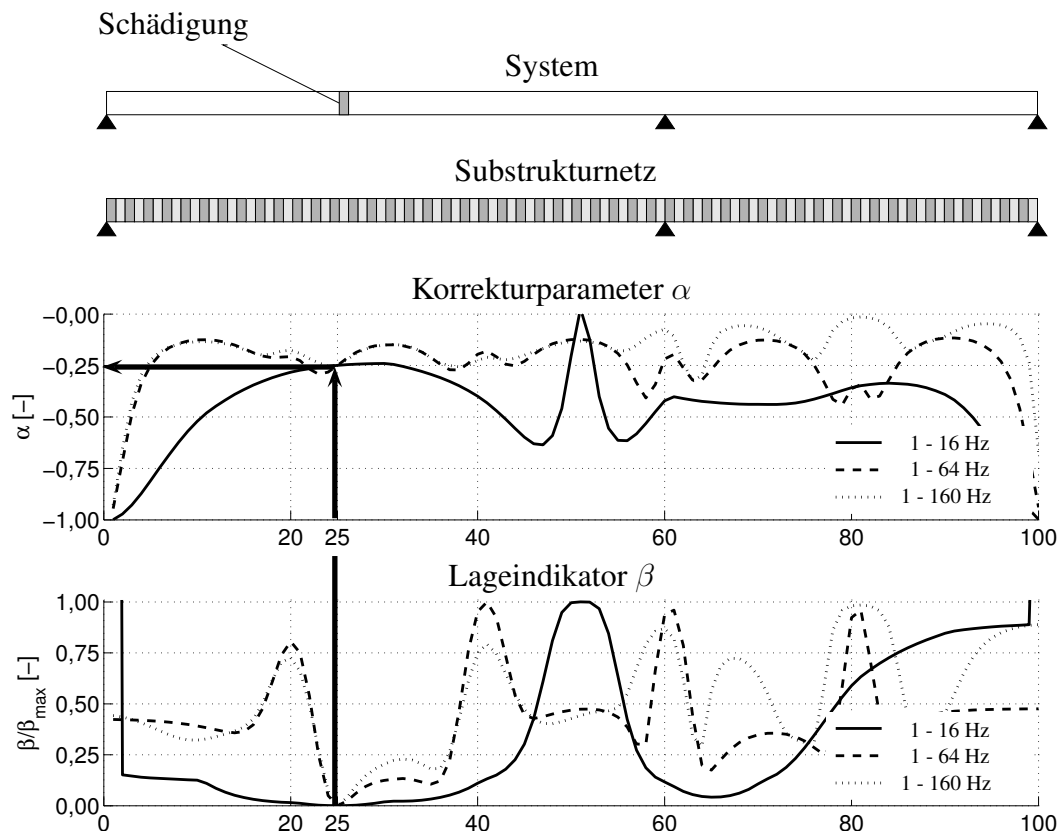


Bild 6.6: Testverfahren für verschiedene Frequenzintervalle

Der Einfluss verrauschter Messwerte auf das Testverfahren geht aus Bild 6.7 hervor. Bei vorhandenem Messrauschen bleibt immer ein Restfehler, der Lageindikator korreliert mit der Größe des Messrauschens und ist für das gesamte Tragwerk ungleich null. Es ist jedoch weiterhin ein deutliches globales Minimum zu erkennen, sodass die Lage der Zustandsänderung eindeutig bestimmbar ist. Die Auswirkungen des Messrauschens auf den Korrekturparameter  $\alpha$  sind gering.

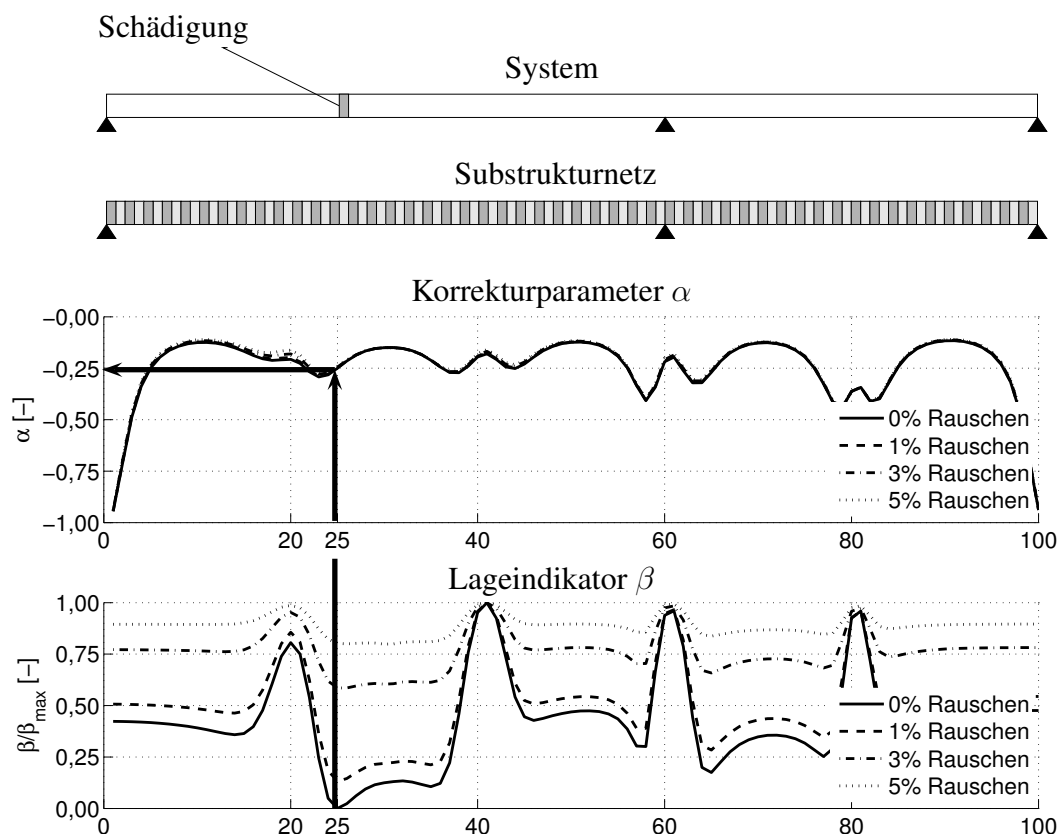


Bild 6.7: Testverfahren bei unterschiedlich stark verrauschten Signalen

Im Normalfall stimmt die räumliche Verteilung einer Zustandsänderung nicht mit den Abmessungen einer Substruktur überein. Bild 6.8 enthält die Ergebnisse für den Fall, dass die Substrukturen kleiner als der Bereich der Schädigung ist. Das globale Minimum des Lageindikators befindet sich im Bereich der Schädigung, sodass deren Lage bestimmbar ist. Die Verringerung des E-Moduls in dem geschädigten Bereich wird allerdings mit dem zugehörigen Korrekturparameter überschätzt. Für die Korrekturparameter für die der Lageindikator  $\beta/\beta_{max}$  größer eins ist, wurde keine Lösung gefunden.

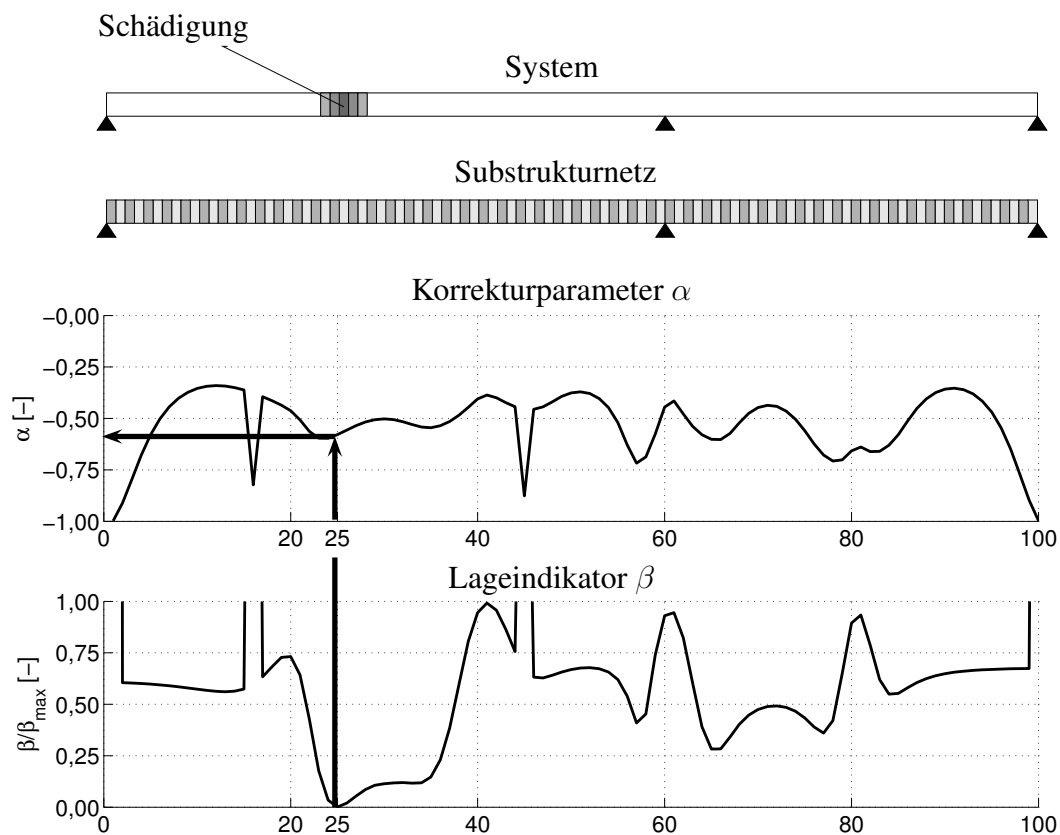


Bild 6.8: Testverfahren bei verteilter Schädigung

Treten mehrere Zustandsänderungen zur gleichen Zeit auf, stößt das Testverfahren schnell an seine Grenzen, wenn das Systemverhalten über die Korrektur einer einzelnen Substruktur nicht mehr richtig erfassbar ist. Für das in Bild 6.9 betrachtete System mit zwei geschädigten Bereichen liegen die beiden kleinsten Minima zwar im Bereich der Schädigungen, für anders verteilte Zustandsänderungen ist dies aber nicht generell gewährleistet.

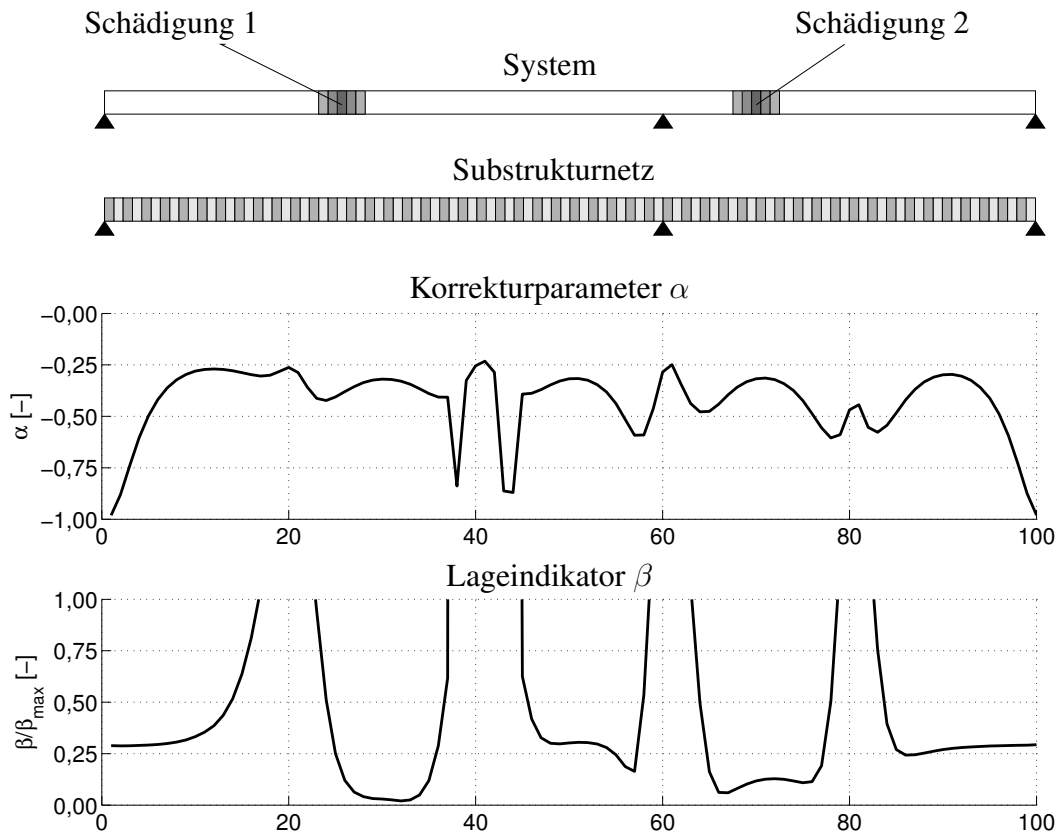


Bild 6.9: Testverfahren bei zwei Schädigungsbereichen

### 6.3.2 Rahmentragwerk

Die vorgestellten Indikatoren ermöglichen auch die Untersuchung räumlicher Strukturen. Das Beispiel in Bild 6.10a zeigt ein Rahmentragwerk, das entlang der Unterkante eingespannt ist und in dessen 9 Rahmenecken die piezokeramischen Aktuatoren P1 bis P9 integriert sind. Die Berechnung erfolgt mit Scheibenelementen, wobei für die piezoelektrischen Aktuatoren das in Kapitel 4.3 vorgestellte Makro-Scheibenelement Anwendung findet.

Im Bereich der Schädigung ist der E-Modul um 30 % verringert. Jeweils zwei Elemente sind in einer Substruktur zusammengefasst, wobei die mittige Elementreihe nicht korrigiert wird. Bild 6.10b zeigt den Lageindikator für den Fall, dass die Struktur mit Aktuator P1 angeregt wird. Das globale Minimum liegt im Bereich der Schädigung, eine eindeutige Identifikation ist jedoch aufgrund der vielen weiteren Minima schwierig. Wenn der mittlere Aktuator P5 angeregt wird, sehen die Ergebnisse für den Lageindikator ähnlich aus, siehe Bild 6.10c. Während das globale Minimum wieder im Bereich der Schädigung liegt, unterscheiden sich jedoch die lokalen Minima in ihrer Verteilung über die Struktur. Die Überlagerung der beiden Ergebnisse führt dazu, dass das globale Minimum deutlicher hervortritt.



Jedes der im Tragwerk integrierten piezokeramischen Elemente kann als Aktuator verwendet werden, einzeln oder in Form zusammenschalteter Arrays. Die Anregung an unterschiedlichen Stellen liefert zusätzliche Informationen über das Schwingungsverhalten der Struktur, wodurch die Qualität des Lageindikators gesteigert wird.

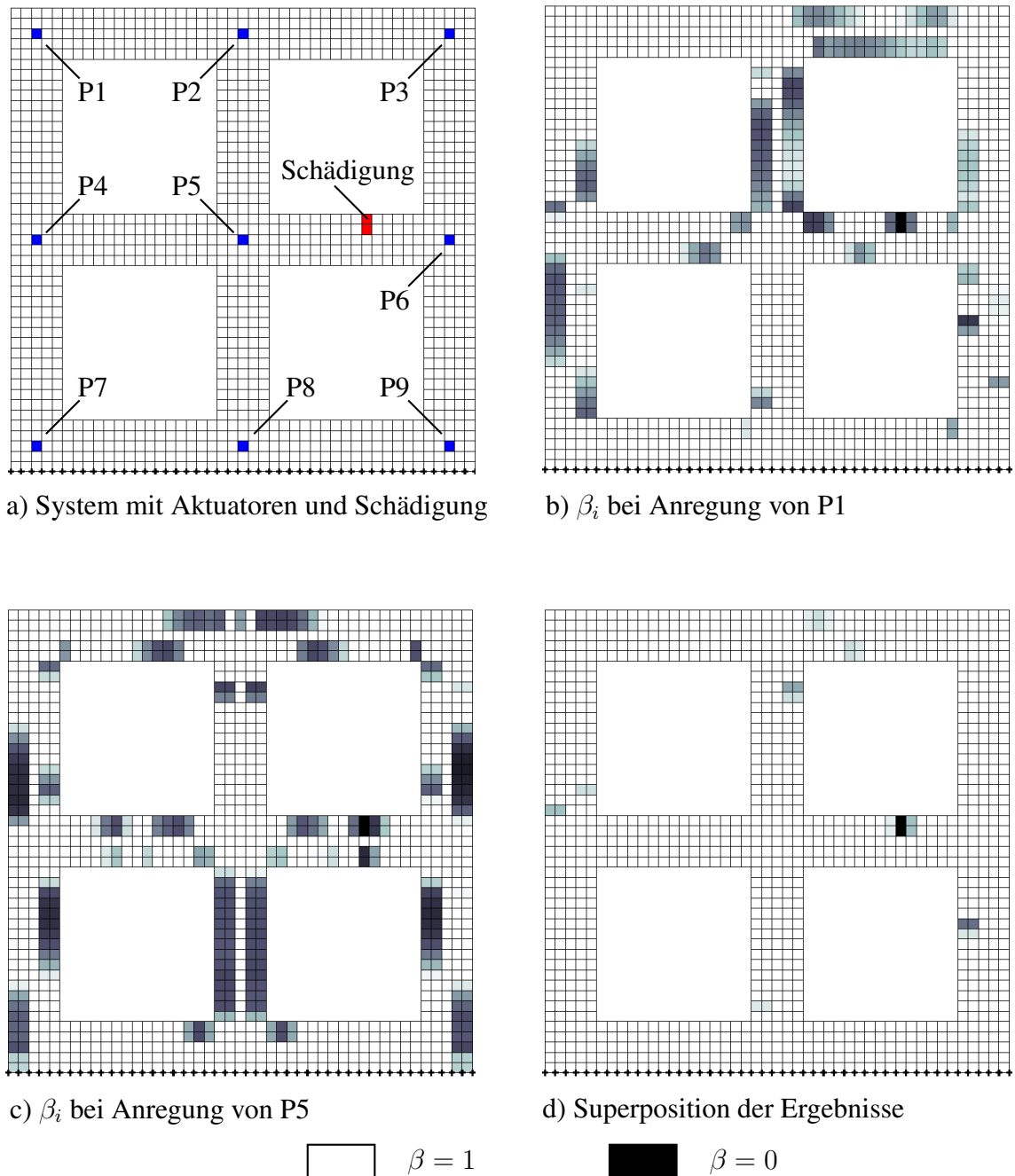


Bild 6.10: Rahmentragwerk mit 9 piezoelektrischen Aktuatoren

## 6.4 Experimentelle Untersuchungen

In diesem Abschnitt erfolgt die experimentelle Validierung der vorgestellten Zustandsindikatoren. Als Referenzlösung dienen die Balkenmodelle des Kragarms und des frei hängenden Stahlblechs, mit den in Abschnitt 5 identifizierten Parametern.

### 6.4.1 Identifikation einer Zusatzmasse

Die Identifikation von Steifigkeit und Masse verläuft bei der Zustandsanalyse nach gleichen Berechnungsschemata. Anstatt die Steifigkeit des Blechs lokal zu verändern, wird daher zunächst eine Zusatzmasse auf dem Kragarm appliziert, siehe Bild 6.11a, um das Blech nicht zu beschädigen und die Wiederholbarkeit des Experimentes zu gewährleisten.

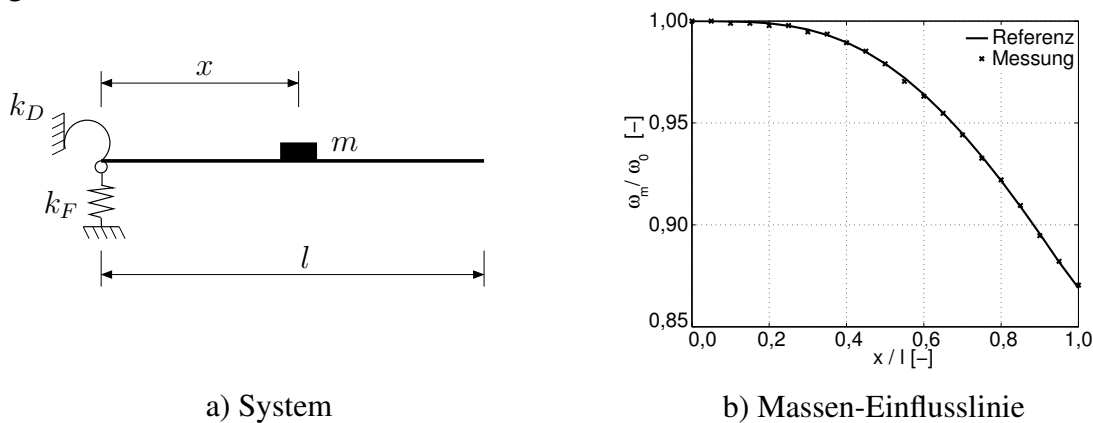


Bild 6.11: Kragarm mit Zusatzmasse

Bild 6.11b zeigt die Änderungen der ersten Eigenkreisfrequenz, wenn eine Zusatzmasse von  $m = 400$  g im Abstand  $x$  von der Einspannung aufgebracht wird. Die Kurve entspricht der Massen-Einflusslinie für die erste Eigenfrequenz. Das Balkenmodell mit den im vorigen Kapitel identifizierten Steifigkeiten und Randbedingungen dient als Referenzlösung und bildet das Schwingungsverhalten in der ersten Eigenfrequenz sehr gut ab. Bild 6.12 zeigt die Auswirkungen auf das Biegefrequenzspektrum, wenn eine Zusatzmasse von  $m = 400$  g im Abstand  $x = 0,35$  m von der Einspannung befestigt ist. Die Zusatzmasse entspricht 8,33 % der Gesamtmasse, die resultierenden Differenzen in den Eigenfrequenzen gegenüber der Referenzlösung betragen bis zu 5 %. Bild 6.13 zeigt die Eigenmoden zu den ersten 10 Eigenfrequenzen. Die Zusatzmasse beeinflusst die Frequenzen am stärksten, deren Eigenmoden im Bereich der Zusatzmasse einen Schwingungsbauch haben ( $\omega_{2,3,5,7,10}$ ). Sitzt die Zusatzmasse im Bereich eines Nulldurchgangs einer Eigenform, so wird die entsprechende Frequenz weniger angesprochen ( $\omega_{4,6,8,9}$ ). Jede Position der Zusatzmasse hinterlässt somit einen charakteristischen Fingerabdruck im Frequenzspektrum, der in Bild 6.14 in Form der bezogenen Differenz  $\Delta\omega = (\omega_0 - \omega_m)/\omega_0$  dargestellt ist.

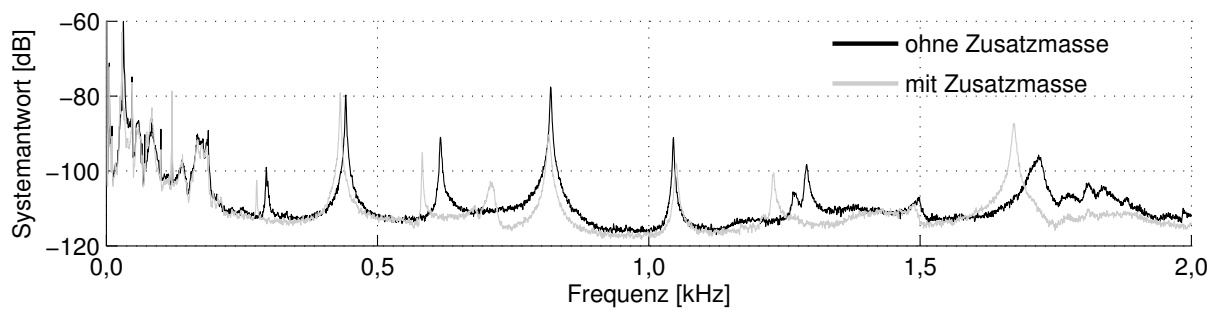


Bild 6.12: Biegefrequenzspektren, gemessen in Sensor S2

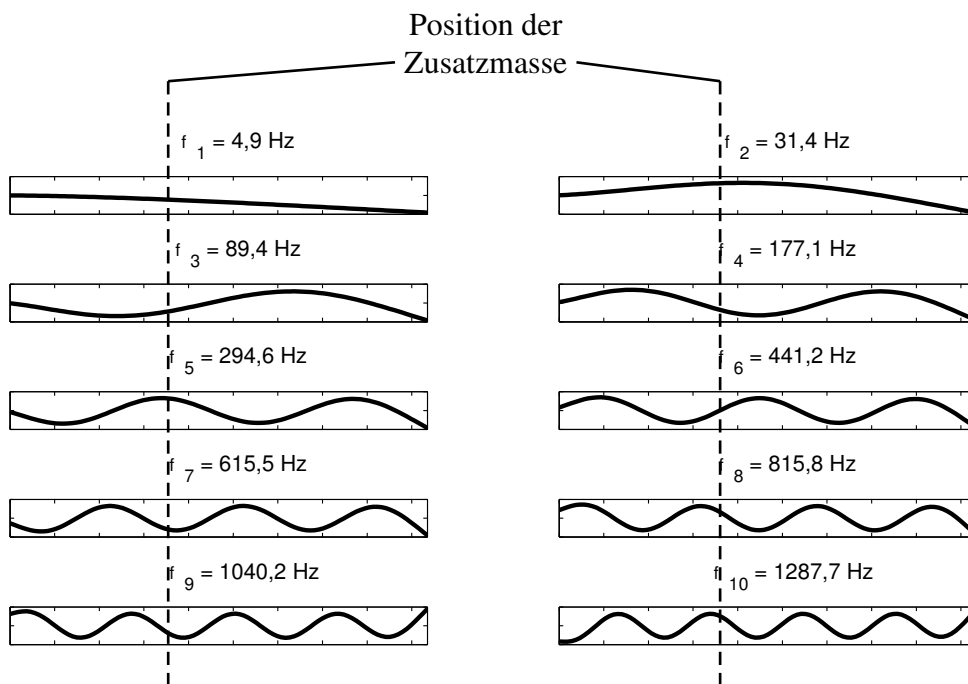


Bild 6.13: Eigenmoden zu den Biegeeigenfrequenzen B01 - B10 (berechnet)

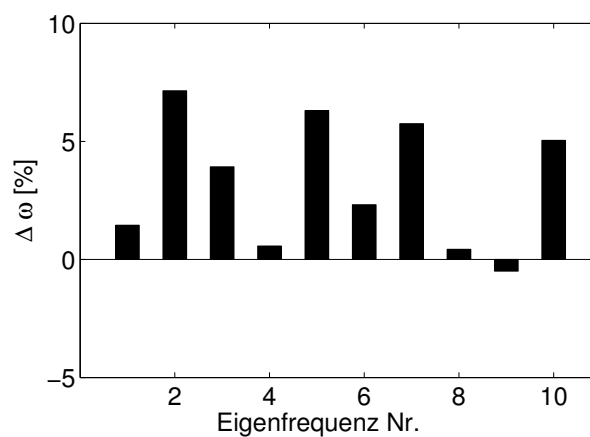


Bild 6.14: Bezogene Differenzen infolge Zusatzmasse

Mit Hilfe der in Abschnitt 6.2 vorgestellten Zustandsindikatoren ist es nun möglich, aus den Änderungen in den Eigenfrequenzen auf Ort und Größe der Zusatzmasse zu schließen. Für die Korrektur ist der Kragarm in 100 Substrukturen unterteilt, die Korrektur erfolgt mit dem Eigenfrequenzresiduum. Der Lageindikator weist ein eindeutiges globales Minimum im Bereich der Zustandsänderung auf, siehe Bild 6.15. Der zugehörige Korrekturparameter ergibt sich zu  $\alpha = 8$ . Jede Substruktur hat eine Masse von 48g womit die Zusatzmasse zu  $m = 384$  g identifiziert wird.

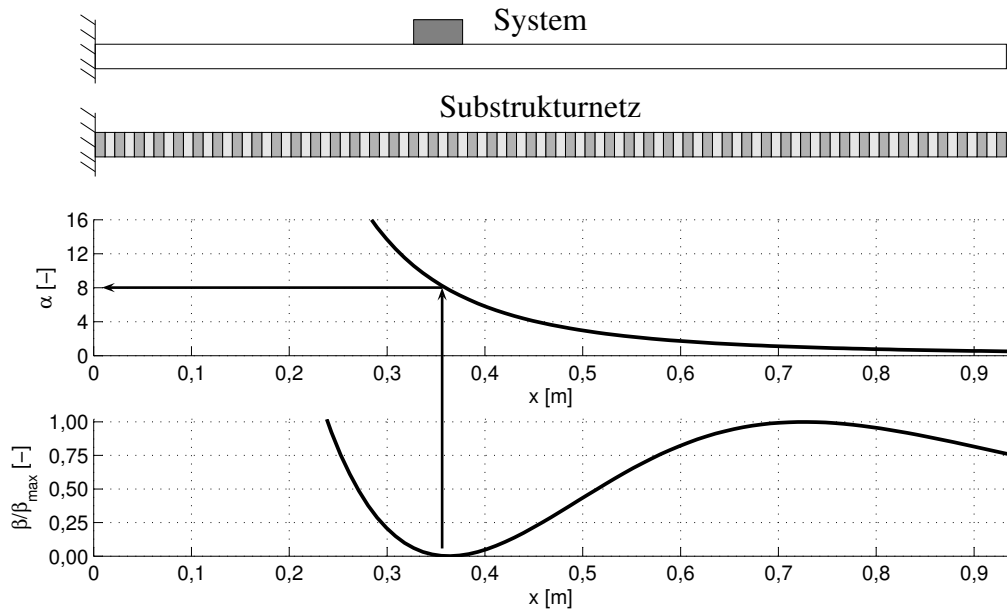


Bild 6.15: Lage- und Korrekturparameter für eine Zusatzmasse in  $x = 0,35$  m

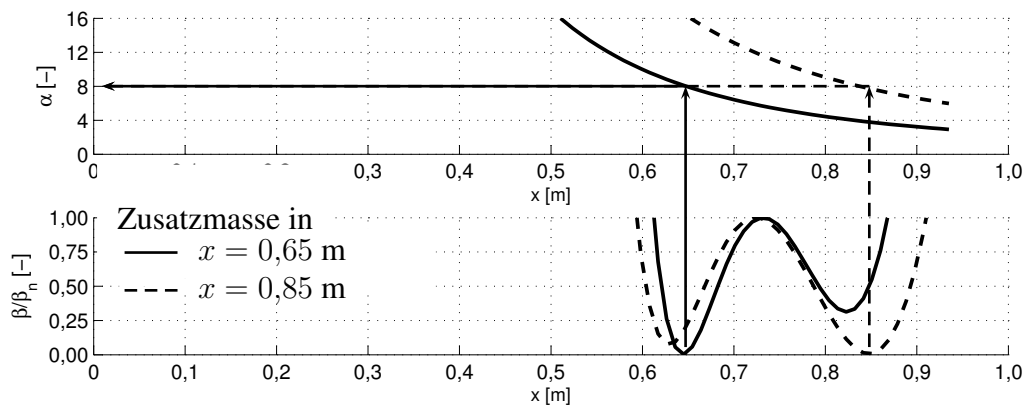


Bild 6.16: Lage- und Korrekturparameter für zwei Positionen der Zusatzmasse

Die Ergebnisse sind nicht für jede Position der Zusatzmasse eindeutig. Für die Positionen  $x = 0,65$  m und  $x = 0,85$  m treten im Lageindikator jeweils zwei Minima auf, die sich in Lage und Ausprägung nur wenig voneinander unterscheiden, vergleiche Bild 6.16. Gelingt es dennoch ein globales Minimum zu identifizieren, ergibt sich für beide Positionen ein Korrekturparameter von  $\alpha = 8$ . Die Zuhilfenahme weiterer Eigenfrequenzen und die Anregung an verschiedenen Stellen erhöht die Qualität des Lageindikators.

## 6.4.2 Identifikation einer Kerbe

Für die Lokalisierung einer Kerbe wird das in Abschnitt 5.4.1 identifizierte frei hängende Stahlblech, im Abstand  $x = 0,4$  m vom linken Rand über die gesamte Breite 2,0 mm tief eingesägt, vgl. Bild 6.17.

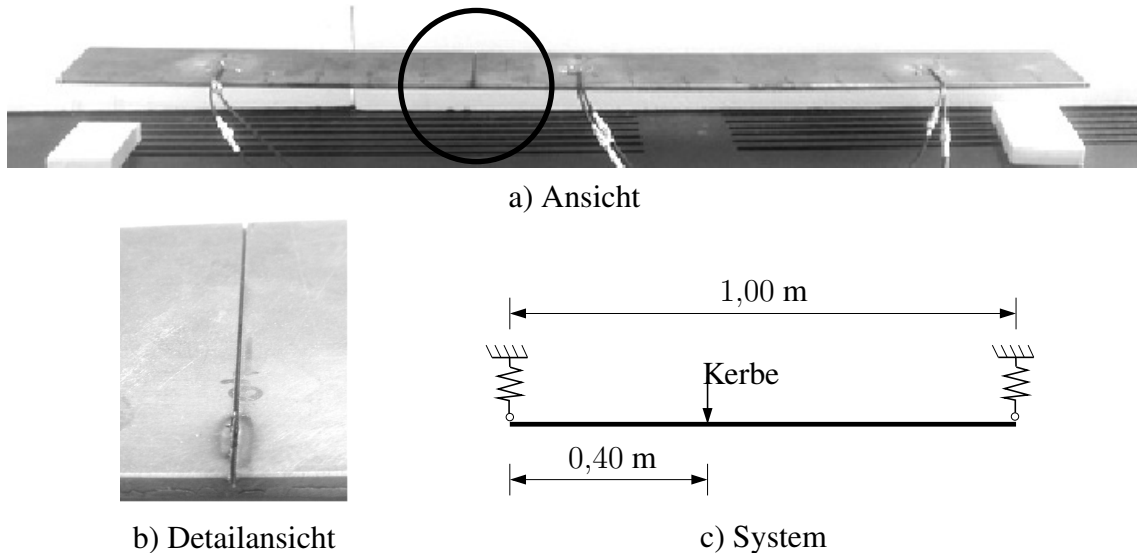


Bild 6.17: Frei hängendes Stahlblech mit Kerbe

Die Auswirkung der Kerbe auf das Biegefrequenzspektrum ist gering. Bild 6.18 zeigt den Vergleich des gemessenen Frequenzspektrums mit der Referenzmessung am intakten Blech.

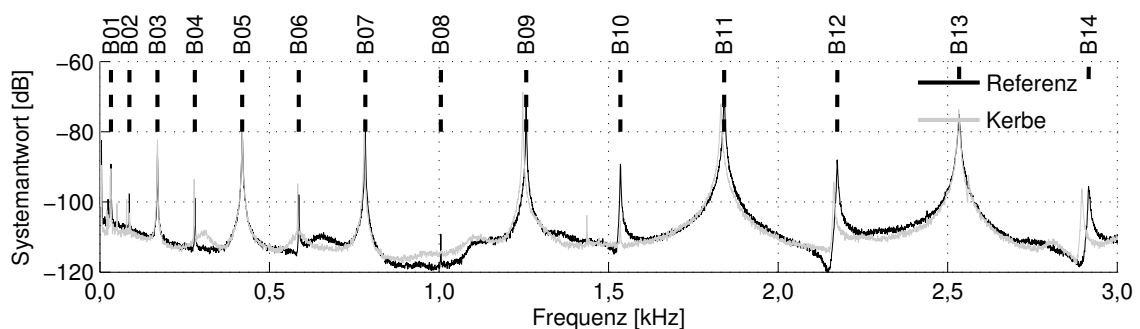


Bild 6.18: Biegefrequenzspektren, gemessen in Sensor S2

Die Differenzen gegenüber dem ungeschädigten Zustand sind kleiner 1 % und damit in der gleichen Größenordnung wie der Modellfehler des Referenzmodells, siehe Bild 6.19. Grundlage der Korrektur ist das zuvor identifizierte Balkenmodell, das in 100 Substrukturen unterteilt ist. Die Korrektur erfolgt mit dem Eigenfrequenzresiduum unter Verwendung der ersten 16 BiegeEigenfrequenzen. Die höchste verwendete Eigenfrequenz dominiert die Korrektur. Bild 6.20 zeigt die Lageindikatorlinien bei variierender Anzahl berücksichtigter Eigenfrequenzen. Aufgrund der Symmetrie des

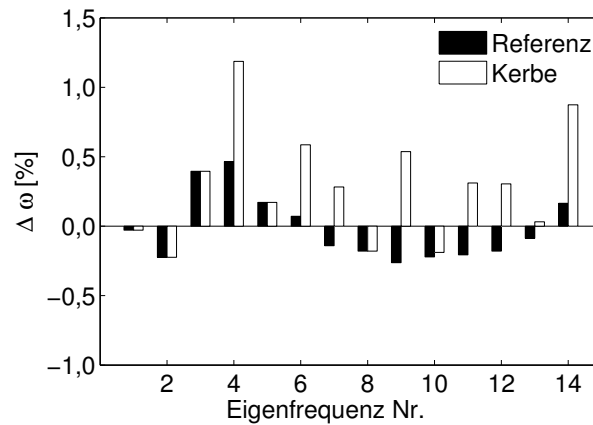


Bild 6.19: Differenzen gegenüber dem ungeschädigten Zustand

Blechs sind auch die Indikatorlinien symmetrisch, weshalb nur eine Hälfte der Indikatorlinien dargestellt ist. Eine Aussage, ob sich die Schädigung in der linken oder der rechten Hälfte des Blechs befindet, ist allein mit den Eigenfrequenzen nicht zu treffen. Die Indikatorlinien sind jeweils auf den größten Wert normiert. Alle Indikatorlinien weisen mehrere lokale Minima an unterschiedlichen Positionen und ein globales Minimum im Bereich der Kerbe auf.

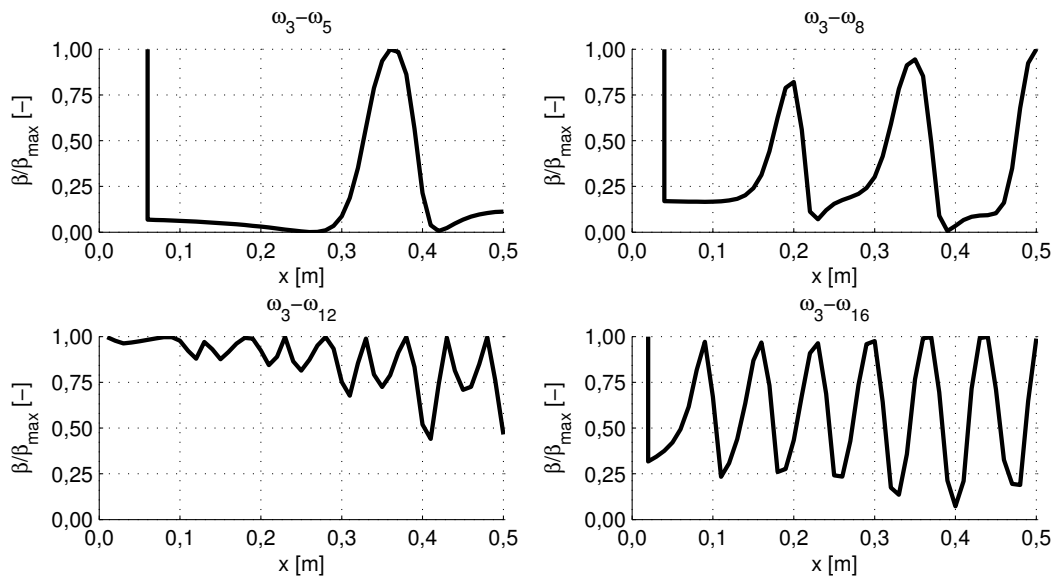


Bild 6.20: Lageindikator bei variierender Anzahl berücksichtigter Eigenfrequenzen

Die Superposition der in Bild 6.20 angegebenen Indikatorlinien hebt das globale Minimum deutlicher hervor, siehe Bild 6.21. Über den zugehörigen Korrekturparameter  $\alpha$  ist die Kerbe quantifizierbar. Die Auswirkungen der Kerbe auf die Eigenfrequenzen entsprechen denen, die eine Reduzierung des E-Moduls der Substruktur in  $x = 0,4$  m um 45 % hat. Bei der Interpretation ist zu berücksichtigen, dass eine Substruktur eine Länge von 1,0 cm hat während die Kerbbreite 1,0 mm beträgt.

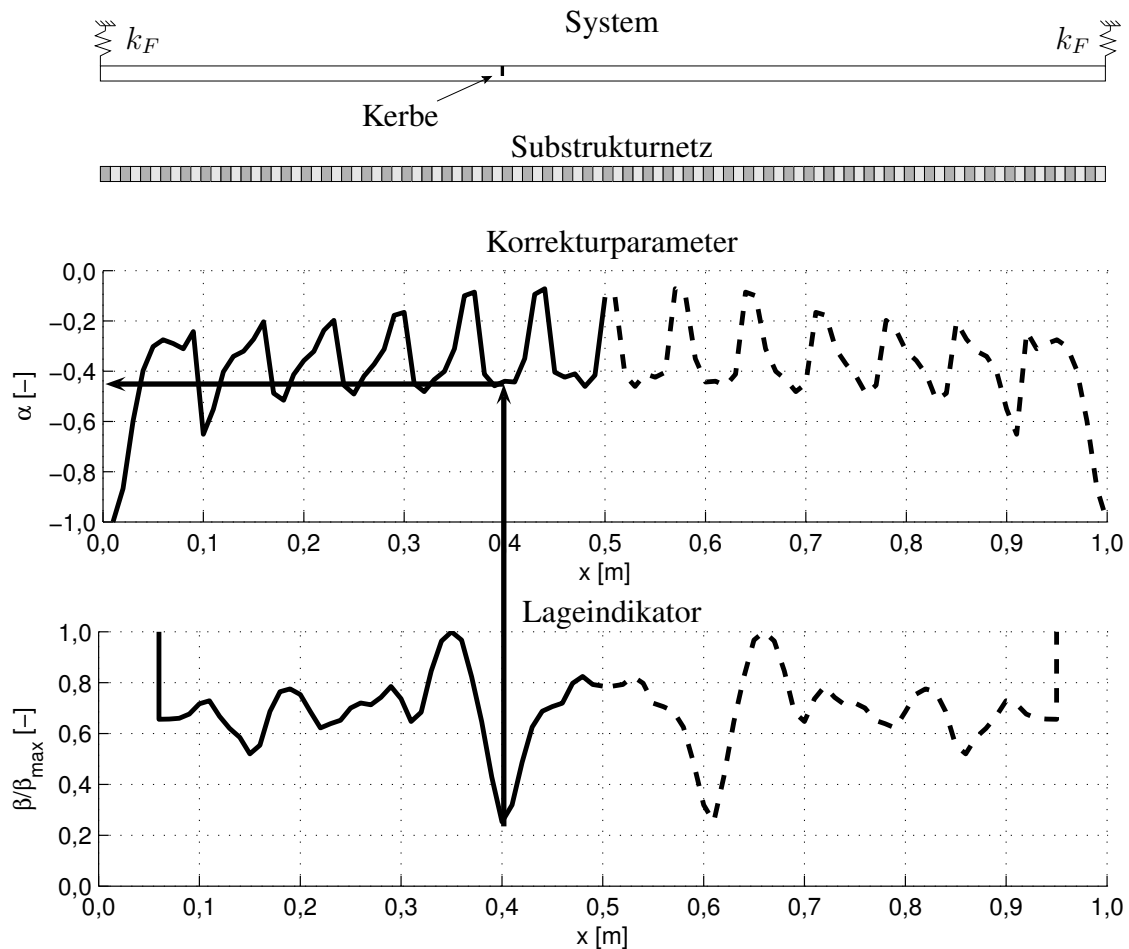


Bild 6.21: Korrektur- und Lageindikator: Superposition der Teilergebnisse

Die Untersuchungen zeigen, dass die Lokalisierung und die Quantifizierung lokaler Zustandsänderungen mit den vorgestellten Indikatoren möglich ist, wenn die gemessenen Größen sensitiv gegenüber der Zustandsänderung sind. Die für die Korrektur verwendeten modalen Größen haben in der Regel einen globalen Charakter. Die infolge einer Anregung in das System eingetragene Energie verteilt sich in Form der Eigenmoden über das gesamte System. Die Sensitivität gegenüber lokalen Zustandsänderungen ist daher gering. Es bleibt zu prüfen, ob die unter Laborbedingungen erreichte Genauigkeit bei der Ermittlung der Frequenzspektren auch bei der Messung am realen Bauwerken erzielt werden kann.

Der Einsatz piezokeramischer Aktuatoren für die experimentelle Schwingungsanalyse von dünnen Stahltragwerken hat sich im Rahmen der Untersuchungen bewährt. Sie ermöglichen die gezielte Anregung von Biege-, Membran- oder Torsionsschwingungen bis in den hohen kHz-Bereich, womit die Schwingungscharakteristiken eines System sehr genau bestimmbar sind.





## 7. Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit stellt ein Monitoringkonzept für die schwingungsbasierte Überwachung von Stahlkonstruktionen vor. Die in das Tragwerk integrierte Messtechnik ermöglicht ein automatisiertes und kontinuierliches Monitoring sowie die Überwachung von nicht frei zugänglichen Bauteilen.

Piezokeramische Aktuatoren erlauben eine exakte Anregung des Tragwerks bis in den hohen kHz-Bereich. Die Aktuatoren werden beidseitig auf dünne Stahlbleche geklebt. Auf diese Weise ist es möglich, Membran-, Biege- und Torsionsschwingungen getrennt voneinander anzuregen. Durch gezielte Anordnung der Aktuator-Arrays können bestimmte Frequenzen der Spektren gezielt hervorgehoben oder ausgeblendet werden. Während die mit piezokeramischen Aktuatoren erzielbaren Kräfte sehr hoch sind, sind die erreichbaren Dehnungen äußerst gering, weshalb die Anwendung piezokeramischer Aktuatoren im Wesentlichen auf Materialien mit schwacher Dämpfung beschränkt ist.

Die Diskretisierung der elektro-mechanischen Gleichungen erfolgt mit der Finite-Elemente-Methode. Das entwickelte Makro-Scheibenelement erlaubt eine zuverlässige und effiziente Berechnung, wenn verhältnismäßig kleine, rotationssymmetrische Aktuatoren für die Anregung dünner und flächiger Strukturen eingesetzt werden. Die elektro-mechanischen Gleichungen werden hierbei analytisch auf Elementebene gelöst und die resultierenden Kräfte den Verschiebungsgrößen der Elementknoten zugeordnet. Bei der Diskretisierung ist eine räumliche Trennung von Aktuator und Tragstruktur somit vermeidbar und die Diskretisierung kann den Erfordernissen des Tragwerks angepasst werden.

Im Rahmen der Systemidentifikation wird die Fehlerquadratmethode für die Identifikation linearer, viskos gedämpfter Systeme genutzt. Eine erfolgreiche Identifikation ist nur mit einem adäquaten mathematischen Modell möglich, das die realen Schwingungseigenschaften des Tragwerks abbilden kann. Vor allem bei der Modellierung der Randbedingungen können bereits vermeintlich kleine Fehler zu unbrauchbaren Ergebnissen führen. Darüber hinaus ist die Wahl der Korrekturparameter und der zugehörigen Substrukturen entscheidend für die Qualität der Ergebnisse. Im Vorfeld der Identifikation ist daher eine Sensitivitätsanalyse durchzuführen, um die für das Trag-

verhalten wichtigen Bereiche und Parameter zu bestimmen und um einen geeigneten Versuchsaufbau festzulegen. Die experimentellen Untersuchungen zeigen, dass die Korrektur der Eigenfrequenzen mit einem geeigneten Modell zu guten Ergebnissen bei der Identifikation globaler Parameter und Randbedingungen führt.

Im Zuge der Bauwerksüberwachung werden in regelmäßigen Abständen Messungen am Bauwerk durchgeführt. Für die Bewertung des globalen IST-Zustands erfolgt die Definition eines Zustandsindikators, der das aktuell gemessene Frequenzspektrum mit dem Frequenzspektrum des mechanischen Referenzmodells vergleicht. Für die Identifikation lokaler Zustandsänderungen im Rahmen des Monitorings werden zwei Indikatoren vorgestellt, welche die Lokalisierung und Quantifizierung lokaler Zustandsänderungen ermöglichen, wenn die gemessenen Größen sensitiv gegenüber der Zustandsänderung sind. Unter Laborbedingungen gelingt die Identifikation einer Zusatzmasse sowie einer Kerbe anhand der gemessenen Eigenfrequenzen. Die Anwendung auf reale Tragwerke ist jedoch begrenzt. Modale Größen haben in der Regel einen globalen Charakter. Die infolge einer Anregung in das System eingetragene Energie verteilt sich in Form der Eigenmoden über das gesamte System. Die Auswirkungen einer lokalen Zustandsänderung auf die modalen Größen ist daher gering, weshalb die Auflösung bei der Identifikation lokaler Zustandsänderungen begrenzt ist.

Für die geplante baupraktische Anwendung scheint die Integration alternativer Verfahren in das Monitoringkonzept sinnvoll. Sowohl die Impedanz-basierte Methode, als auch die Lambwellen-basierte Methode können dieselben piezokeramischen Aktuatoren nutzen, wie sie im Rahmen dieser Arbeit verwendet werden. Während die Impedanz-basierte Methode der lokalen Überwachung kritischer Punkte dient, eignet sich die Lambwellen-basierte Methode für die Überwachung flächiger Strukturen. Beide Verfahren sind sensitiv gegenüber lokalen Zustandsänderungen, eine Quantifizierung ist jedoch nicht möglich. Die vorgestellten frequenzbasierten Methoden erlauben es, Aussagen über das globale Tragverhalten zu treffen und die mit den o. g. Verfahren detektierten lokalen Zustandsänderungen bezüglich ihrer Relevanz für das Gesamttragwerk zu beurteilen.

Entwicklungsbedarf besteht noch im Bereich der Messtechnik. Diese muss unter wechselnden Umweltbedingungen dauerhaft und zuverlässig arbeiten. Systemausfälle und häufige Fehlalarme widersprechen dem Wunsch nach automatisierter Überwachung. Die Messtechnik sollte daher selbsttestend, wartungsarm und robust gegenüber äußeren Einwirkungen und Alterung sein.

# Literaturverzeichnis

- [1] H. Ahmadian, J. E. Mottershead & M. I. Friswell: *Regularisation Methods for Finite Element Model Updating*. Mech. Syst. Signal Pr. 12, 47–64, 1998.
- [2] H. Ahrens & D. Dinkler: *Finite-Elemente-Methoden*. Institut für Statik, TU Braunschweig, 2006.
- [3] R. Allemang: *The Modal Assurance Criterion – Twenty Years of Use and Abuse*. J. Sound Vib. 37, 14–23, 2003.
- [4] H. Allik & T. J. R. Hughes: *Finite Element Method for Piezoelectric Vibration*. Int. J. Numer. Meth. Eng. 2, 151–157, 1970.
- [5] J. W. Ayres, F. Lalande, Z. Chaudhry & C. A. Rogers: *Qualitative Impedance-Based Health Monitoring of Civil Infrastructures*. Smart Mater. Struct. 7, 599–605, 1998.
- [6] K. Bathe: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, 2002.
- [7] R. Batra & X. Liang: *The Vibration of a Rectangular Laminated Elastic Plate with Embedded Piezoelectric Sensors and Actuators*. Comput. Struct. 63, 203–216, 1997.
- [8] A. Benjeddou: *Advances in Piezoelectric Finite Element Modeling of Adaptive Structural Elements: A Survey*. Comput. Struct. 76, 347–363, 2000.
- [9] A. Benjeddou, J. Deü & S. Letombe: *Free Vibrations of Simply-Supported Piezoelectric Adaptive Plates: an Exact Sandwich Formulation*. Thin Wall. Struct. 40, 573–593, 2002.
- [10] A. Benjeddou & M. Trindade: *Piezoelectric Actuation Mechanisms for Intelligent Sandwich Structures*. Smart Mater. Struct. 9, 328–335, 2000.
- [11] A. Benjeddou, M. Trindade & R. Ohayon: *A Unified Beam Finite Element Model for Extension and Shear Piezoelectric Actuation Mechanisms*. J. Intel. Mat. Syst. Str. 8, 1012–1025, 1997.
- [12] J. Brownjohn: *Structural Health Monitoring of Civil Infrastructure*. Philos. T. Roy. Soc. A 365, 589–692, 2007.
- [13] A. Butz: *Nichtlineare Formulierung piezoelektrischer 3D-Stabstrukturen - Theorie und Finite-Elemente-Modellierung*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), 2006.
- [14] W. Cady: *Piezoelectricity: An Introduction to the Theory and Applications of Electro-mechanical Phenomena in Crystals*. Dover Publ., 1964.
- [15] E. Carrera & M. Boscolo: *Classical and Mixed Finite Elements for Static and Dynamic Analysis of Piezoelectric Plates*. Int. J. Numer. Meth. Eng. 70, 1135–1181, 2007.

- [16] P. Cawley & D. Alleyne: *The Use of Lamb Waves for the Long Range Inspection of Large Structures*. Ultrasonics 34, 287–290, 1996.
- [17] P. Ceramic. Product Information Catalogue, 2003.
- [18] S. Chen, Z. Wang & X. Liu: *Active Vibration Control and Suppression for Intelligent Structures*. J. Sound Vib. 200, 167–177, 1997.
- [19] J. Cooley & J. Tukey: *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*. Math. Comput. 19, 297–301, 1965.
- [20] P. Cornwell, S. Doebling & C. Farrar: *Application of the Strain Energy Damage Detection Method to Plate-Like Structures*. J. Sound Vib. 224, 359–374, 1999.
- [21] L. Demkowicz: *Computing with Hp-adaptive Finite Elements: One and Two Dimensional Elliptic and Maxwell problems*. CRC Press, 2006.
- [22] DIBt-Mitteilungen: *Hinweise für die Überprüfung der Standsicherheit von baulichen Anlagen durch den Eigentümer/Verfügungsberechtigten*. Bauministerkonferenz, 2006.
- [23] DIN1076: *Ingenieurbauwerke im Zuge von Straßen und Wegen - Überwachung und Prüfung*. NABau Deutsches Institut für Normung, 1999.
- [24] S. Doebling, C. Farrar, M. Prime & D. Shevitz: *Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems from Changes in their Vibration Characteristics: a Literature Review*. , Los Alamos National Lab, 1996.
- [25] F. Döngi, D. Dinkler & B. Kröplin: *Active Panel Flutter Suppression Using Self-Sensing Piezoactuators*. AIAA J. 34, 1224–1230, 1996.
- [26] J. Dosch, D. Inman & E. Garcia: *A Self-Sensing Piezoelectric Actuator for Collocated Control*. J. Intel. Mat. Syst. Str. 3, page 166, 1992.
- [27] E. P. Eer Nisse: *Resonances of One-Dimensional Composite Piezoelectric and Elastic Structures*. IEEE T. Son. Ultrason. 14, 59–67, 1967.
- [28] E. P. Eer Nisse: *Variational Method for Electroelastic Vibration Analysis*. IEEE T. Son. Ultrason. 14, 153–160, 1967.
- [29] P. Eykhoff: *System Identification: Parameter and State Estimation*. Wiley, 1979.
- [30] A. Fahr, C. Chapman, D. Forsyth, C. Poon & J. Laliberte: *Nondestructive Evaluation Methods for Damage Assessment in Fiber-Metal Laminates*. Polymer Composites 21, 568–575, 2000.
- [31] C. Farrar & K. Worden: *An Introduction to Structural Health Monitoring*. Philos. T. Roy. Soc. A 365, 303–315, 2007.
- [32] C. R. Farrar, S. W. Doebling & D. A. Nix: *Vibration-Based Structural Damage Identification*. Philos. T. Roy. Soc. A 359, 131–149, 2001.
- [33] T. Feng: *Entwicklung numerischer Verfahren zur Parameteridentifikation linearer mechanischer Systeme im Frequenzbereich*. VDI-Verlag, 1993.

- [34] M. Friswell & J. Mottershead: *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Kluwer Academic Pub, 1995.
- [35] M. I. Friswell: *Damage Identification using Inverse Methods*. Philos. T. Roy. Soc. A 365, 393–410, 2007.
- [36] M. I. Friswell, J. E. Mottershead & H. Ahmadian: *Finite-Element Model Updating Using Experimental Test Data: Parametrization and Regularization*. Philos. T. Roy. Soc. A 359, 169–186, 2001.
- [37] C.-P. Fritzen: *Ein Beitrag zur Identifikation der Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen linearer mechanischer Systeme*. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1986.
- [38] Y. Gao, B. F. Spencer Jr, M. ASCE & D. Bernal: *Experimental Verification of the Flexibility-Based Damage Locating Vector Method*. J. Eng. Mech.-ASCE 133, 1043–1049, 2007.
- [39] V. Giurgiutiu & A. Zagrai: *Damage Detection in Thin Plates and Aerospace Structures with the Electro-Mechanical Impedance Method*. Structural Health Monitoring 4, 99–118, 2005.
- [40] V. Giurgiutiu, A. N. Zagrai & J. J. Bao: *Piezoelectric Wafer Embedded Active Sensors for Aging Aircraft Structural Health Monitoring*. Structural Health Monitoring 1, 41–61, 2002.
- [41] V. Giurgiutiu, A. N. Zagrai & J. J. Bao: *Damage Identification in Aging Aircraft Structures with Piezoelectric Wafer Active Sensors*. J. Intel. Mat. Syst. Str. 15, 673–687, 2004.
- [42] G. Goodwin & R. Payne: *Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis*. Academic Press New York, 1977.
- [43] M. Gorman: *Plate Wave Acoustic Emission*. J. Acoust Soc. Am. 90, 358–364, 1991.
- [44] A. Görnandt: *Einbeziehung der Temperatur in die Modellbildung und Berechnung von aktiven Strukturen mit piezokeramischen Aktoren und Sensoren*. Dissertation, Universität Magdeburg, 2002.
- [45] G. Haertling: *Ferroelectric Ceramics: History and Technology*. J. Am. Ceram. Soc. 82, 797–818, 1999.
- [46] T. Hsu: *Damage Diagnosis of Frame Structures Using Modified Modal Strain Energy Change Method*. J. Eng. Mech.-ASCE 134, 1000–1012, 2008.
- [47] W. Hwang, H. Park & W. Hwang: *Vibration Control of a Laminated Plate with Piezoelectric Sensor/Actuator: Finite Element Formulation and Modal Analysis*. J. Intel. Mat. Syst. Str. 4, page 317, 1993.
- [48] T. Ikeda: *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford University Press, 1990.
- [49] S. Imer & P. Zimmermann: *Freie Schwingungen kreisförmig begrenzter Scheiben bei polarorthotropem Materialgesetz*. Ingenieur-Archiv 42, 395–410, 1973.

- [50] K. Jones & J. Turcotte: *Finite Element Model Updating using Antiresonant Frequencies*. J. Sound Vib. 252, 717–727, 2002.
- [51] R. Kalman: *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*. J. Basic Eng. 82, 35–45, 1960.
- [52] T. Kiefer: *Fehlerlokalisation und Parameterkorrektur in Finite-Elemente-Modellen anhand gemessener Schwingungsdaten*. VDI-Fortschritt-Berichte, Reihe, 1997.
- [53] S. Klinkel: *Nichtlineare Modellierung ferroelektrischer Keramiken und piezoelektrische Finite-Element-Formulierung*. Habilitationsschrift, Universität Karlsruhe (TH), 2007.
- [54] S. Klinkel & W. Wagner: *A Geometrically Non-Linear Piezoelectric Solid Shell Element Based on a Mixed Multi-Field Variational Formulation*. Int. J. Numer. Meth. Eng. 65, 349–382, 2005.
- [55] M. Kögl: *A Boundary Element Method for Dynamic Analysis of Anisotropic Elastic, Piezoelectric, and Thermoelastic Solids*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2000.
- [56] M. Kögl & M. L. Bucalem: *Analysis of Smart Laminates Using Piezoelectric MITC Plate and Shell Elements*. Comput. Struct. 83, 1153–1163, 2005.
- [57] W. Krätzig, M. K. & M. M. Link: *Der Ingenieurbau: Grundwissen, Band Baustatik / Baudynamik*, Kapitel Baudynamik und Systemidentifikation, 365–518. Ernst & Sohn, 1996.
- [58] R. Lammering & S. Mesecke-Rischmann: *Multi-Field Variational Formulations and Related Finite Elements for Piezoelectric Shells*. Smart Mater. Struct. 12, 904–913, 2003.
- [59] R. Lerch: *Simulation of Piezoelectric Devices by Two- and Three-Dimensional Finite Elements*. IEEE T. Ultrason. Ferr. 37, 233–247, 1990.
- [60] Y. Y. Li, L. Cheng, L. H. Yam & W. O. Wong: *Identification of Damage Locations for Plate-Like Structures using Damage Sensitive Indices: Strain Modal Approach*. Comput. Struct. 80, 1881–1894, 2002.
- [61] S. Lin: *Radial Vibration of the Combination of a Piezoelectric Ceramic Disk and a Circular Metal Ring*. Smart Mater. Struct. 16, 469–476, 2007.
- [62] M. Link: *Updating of Analytical Models-Basic Procedures and Extensions*. NATO ASI Series E 363, 281–304, 1999.
- [63] M. Link & M. Weiland: *Damage Identification by Multi-Model Updating in the Modal and in the Time Domain*. Mech. Syst. Signal Pr. 23, 1734–1746, 2009.
- [64] K. Linnemann: *Magnetostriktive und piezoelektrische Materialien: Konstitutive Modellierung und Finite-Elemente-Formulierung*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), 2007.
- [65] O. Loland & C. Dodds: *Experiences in Developing and Operating Integrity Monitoring Systems in the North Sea*. In: Proceedings of the Eighth Annual Offshore Technology Conference, 1976.

- [66] S. Loppe & U. Peil: *Detection of Structural Changes by Means of Piezo Discs*. In: Structural Health Monitoring 2006: Proc. of the Third Europ. Workshop, 2006.
- [67] A. K. Louis: *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. Teubner, 1989.
- [68] G. Maugin, J. Pouget, R. Drouot & B. Collet: *Nonlinear Electromechanical Coupling*. John Wiley Sons Ltd., 1992.
- [69] J. Medgenberg & T. Ummenhofer: *Analyse von Ermüdungsschädigung bei Stahl durch thermografische Untersuchung des thermomechanischen Kopplungsverhaltens*. Bauingenieur 83, 277–287, 2008.
- [70] D. Mehlfeldt: *Modellierung und optimale Steuerung piezoelektrisch aktuierter Einspritzventile*. Dissertation, Universität Siegen, 2006.
- [71] S. Mesecke-Rischmann: *Modellierung von flachen piezoelektrischen Schalen mit zuverlässigen finiten Elementen*. Dissertation, Universität der Bundeswehr Hamburg, 2003.
- [72] J. Milberg & P. Kirchknopf: *Ermittlung modaler Parameter aus Übertragungsfrequenzgängen - Auswerteverfahren zur experimentellen Modalanalyse an Werkzeugmaschinen*. Z. Angew. Math. Mech. 73, 141 – 153, 1993.
- [73] R. D. Mindlin: *Forced Thickness-Shear and Flexural Vibrations of Piezoelectric Crystal Plates*. J. Appl. Mech.-T. 23, 83–88, 1952.
- [74] J. E. Mottershead & M. I. Friswell: *Model Updating in Structural Dynamics: A Survey*. J. Sound Vib. 167, 347–375, 1993.
- [75] H. G. Natke: *Baudynamik, Einführung in die Dynamik mit Anwendungen aus dem Bauwesen*. TeubnerVerlag, 1989.
- [76] H. G. Natke: *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*. Vieweg-Verlag, 1992.
- [77] M. Oeljeklaus: *Ein Beitrag zur Systemidentifikation: Das Projektive Eingangsgrößenverfahren und das Regularisierte Ausgangsgrößenverfahren im Frequenzbereich für unvollständige Messungen*. Habilitationsschrift, Universität Hannover, 1998.
- [78] U. Pabst: *Identifikation von Randbedingungen und Rissen in einfach schwingenden elastischen Kontinua*. VDI-Verlag, 1993.
- [79] A. Pandey & M. Biswas: *Experimental Verification of Flexibility Difference Method for Locating Damage in Structures*. J. Sound Vib. 184, 311–328, 1995.
- [80] A. Pandey, M. Biswas & M. Samman: *Damage Detection from Changes in Curvature Mode Shapes*. J. Sound Vib. 145, 321–332, 1991.
- [81] G. Park, H. H. Cudney & D. J. Inman: *Feasibility of Using Impedance-Based Damage Assessment for Pipeline Structures*. Earthquake Eng. Struc. 30, 1463–1474, 2001.
- [82] C. Petersen: *Dynamik der Baukonstruktionen*. Vieweg, 1996.
- [83] V. Piefort: *Finite Element Modeling of Piezoelectric Active Structures*. Dissertation, Freie Universität Brüssel, 2001.

- [84] R. Simkovics: *Nichtlineares piezoelektrisches Finite-Elemente-Verfahren zur Modellierung piezokeramischer Aktoren*. Dissertation, Universität Erlangen, 2002.
- [85] S. Smith: *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. California Techn. Publ. San Diego, 1999.
- [86] U. Stewering: *Schädigungsanalyse für Tragwerke anhand ihrer modalen Systemeigenschaften*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 2008.
- [87] K. Y. Sze & Y. S. Pan: *Hybrid Finite Element Model for Piezoelectric Materials*. J. Sound Vib. 226, 519–547, 1999.
- [88] A. Teughels: *Inverse Modelling of Civil Engineering Structures based on Operational Modal Data*. Dissertation, Katholieke Universiteit te Leuven, 2003.
- [89] A. N. Thikonov, V. Y. Arsenin & F. John: *Solution of ill-posed problems*. Vh Winston Washington DC, 1977.
- [90] H. F. Tiersten & R. D. Mindlin: *Forced Vibrations of Piezoelectric Crystal Plates*. Q. Appl. Math. XX, 489–501, 1962.
- [91] J. Valasek: *Piezo-Electric and Allied Phenomena in Rochelle Salt*. Physical Review 17, 475–481, 1921.
- [92] W. Voigt: *Lehrbuch der Kristallphysik*. BG Teubner, 1910.
- [93] S. von Ende, I. Schäfer & R. Lammering: *Lamb Wave Excitation with Piezoelectric Wafers—an Analytical Approach*. Acta Mech. 193, 141–150, 2007.
- [94] B. Wiedemann: *Modelle für vorgespannten Membranen mit Faltenbildung*. Dissertation, TU Braunschweig, 2002.
- [95] O. Zienkiewicz, R. Taylor & J. Too: *Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells*. Int. J. Numer. Meth. Eng. 3, 275–290, 1971.
- [96] O. Zienkiewicz, R. Taylor & J. Zhu: *The Finite Element Method*. Elsevier, 2005.
- [97] P. Zimmermann: *Erzwungene und freie ungedämpfte Schwingungen kreisförmig begrenzter Scheiben*. Ingenieur-Archiv 40, 377–401, 1971.



## **Berichte aus dem Institut für Statik ab 2003**

- |     |          |   |
|-----|----------|---|
| Nr. | 2003-96  | B. HÜBNER: Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen  |
| Nr. | 2003-97  | J. Geistefeld: Stochastische Finite-Element-Methoden mit Anwendung auf aeroelastische Tragsysteme                               |
| Nr. | 2003-98  | O. KNOKE: Beulwiderstände zusammengesetzter Zylinder-Kegel-Schalen  |
| Nr. | 2005-99  | A. KÖLKE: Modellierung und Diskretisierung bewegter Diskontinuitäten in randgekoppelten Mehrfeldsystemen                        |
| Nr. | 2006-100 | D. DINKLER (Hrsg.): Institut für Statik, Lehre und Forschung, 1996-2006   |
| Nr. | 2006-101 | A. VEHRE: Ein Reduktionsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit Finiten Raum-Zeit-Elementen                             |
| Nr. | 2006-102 | M. LÖHR: Analyse aeroelastischer Systeme mit Spektralen Stochastischen Finite-Element-Methoden                                  |
| Nr. | 2006-103 | L. ASCHENBRENNER: Mehrkomponenten-Modell zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Asphalt                                |
| Nr. | 2006-104 | T. ZÜMENDORF: Ein gradientenabhängiges Modell für Schädigung bei viskoplastischem Materialverhalten                             |
| Nr. | 2007-105 | C. LEPPERT: Mehrphasenmodell für granulare Medien zur numerischen Untersuchung des Phasenübergangs bei der Entleerung von Silos |
| Nr. | 2007-106 | V. KRASE: Stability of Municipal Solid Waste Landfills  |
| Nr. | 2007-107 | J. PONTOW: Imperfektionsempfindlichkeit und Grenzlaster von Schalentragsystemen   |
| Nr. | 2009-108 | M. BECKMANN: Ein gradientenabhängiges Modell für anisotrope Schädigung von Beton unter Berücksichtigung von Porendruck          |
| Nr. | 2009-109 | P. SUN: Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit aktiver Schwingungskontrolle durch piezoelektrische Materialien                       |
| Nr. | 2009-110 | J. VELDE: 3D Nonlocal Damage Modeling for Steel Structures under Earthquake Loading   |

## **Sonderdrucke**

Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens.

Hermann Ahrens zum 60. Geburtstag (1998).

Herausgeber: D. Dinkler, U. Kowalsky.

Baustatik-Baupraxis 8.

Berichte der Fachtagung am 21. und 22. März 2002 in Braunschweig.

Herausgeber: D. Dinkler.

Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig  
Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig, Deutschland  
Telefon +49 (0)531 / 391-3667, Telefax +49 (0)531 / 391-8116  
E-Mail [statik@tu-bs.de](mailto:statik@tu-bs.de), Homepage <http://www.statik.tu-bs.de>